МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Гимназия № 7 г. Гродно»

САМОПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Фролов Дмитрий Андреевич,
учащийся 10 «Б» класса

Лонская Ольга Валерьевна,
учитель математики
ГУО «Гимназия № 7 г. Гродно»,
первая кв. категория учителя математики

Гродно, 2021

САМОПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Д. А. Фролов
ГУО «Гимназия № 7 г. Гродно», 10 «Б» класс,
Гродно, Беларусь

Научный руководитель – О. В. Лонская, учитель математики ГУО «Гимназия № 7 г. Гродно», первая кв. категория учителя математики.

Работа 18 с., 3 ч., 13 рис., 4 табл., 3 источников.

Ключевые слова: многоугольник с самопересечением, ориентир, сумма внутренних углов многоугольников с самопересечениями.

Обычные песочные часы, различная шнуровка кроссовок, орнаменты, тросы мостов, хиромантия положили начало данному исследованию. А невыпуклые многоугольники с самопересечениями стали предметом исследования.

Цель исследования – рассмотреть различные виды невыпуклых многоугольников и найти некоторые их свойства. Для этой цели были определены следующие задачи:

· рассмотреть невыпуклые многоугольники с самопересечением;

· найти сумму внутренних углов многоугольников с одним и более самопересечением;

· вывести формулы для нахождения суммы углов многоугольников, имеющих одно и более самопересечение при различном ориентире.

В работе вводится понятие ориентированного многоугольника: каждой стороне многоугольника приписывается направление (ориентир). Используется формула суммы внутренних углов многоугольника 180·(n-2), понятия внешнего и внутреннего углов треугольника для нахождения суммы внутренних улов невыпуклых многоугольников с самопересечениями.

В результате проведенной исследовательской работы была получена формула нахождения внутренних углов невыпуклых многоугольников с одним пересечение **180° · n, где n – число сторон многоугольника** и было установлено, что сумма внутренних углов у многоугольников с одним пересечением не зависит от ориентира. А у многоугольников с большим числом самопересечений сумма углов будет завесить от ориентира. Доказательства проводились аналогично случаям с одним пересечением. В работе было установлено, что значения сумм внутренних углов у многоугольников с большим числом самопересечений чередуются в зависимости от чётности количества углов, а значит, формулы принимают вид: **180°·n, если нечетное количество самопересечений, 180°· (n + 2), если четное количество самопересечений.** Было замечено, что для многоугольников с количеством самопересечений два и более, общая сумма внутренних углов при разных ориентирах всегда одинакова.

Материал данного исследования может использоваться на факультативных занятияхпо математике, математических олимпиадах, конкурсах с целью развития творческих способностей учащихся.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Школьная математика делится на алгебру и геометрию. На алгебре мы изучаем цифры, числа, различные арифметические действия с ними, а на геометрии – точки, прямые, различные геометрические фигуры, в том числе многоугольники: выпуклые и невыпуклые.

Обычные песочные часы, различная шнуровка кроссовок, орнаменты, тросы мостов, хиромантия подтолкнули нас на исследование многоугольников с самопересечением.

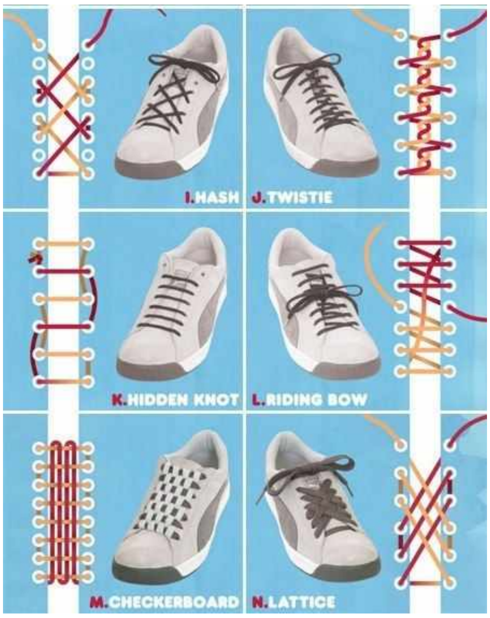


Рисунок 1 – Шнуровка кроссовок

Рисунок 2 – Бокал в форме песочных часов

Рисунок 3 – Хиромантия

Рисунок 4 – Сводные арки моста

Очевидно, что фигур очень много. Что касается многоугольников выпуклых, их мы изучали в школьном курсе геометрии. А вот изучением невыпуклых многоугольников с самопересечениями мы будем заниматься в нашей работе.

В нашей работе мы поставили перед собой следующую цель: рассмотреть различные виды невыпуклых многоугольников и найти некоторые их свойства.

Для этого мы решали следующие задачи:

· рассматривали невыпуклые многоугольники с самопересечением;

· находили сумму внутренних углов многоугольников с одним и более самопересечением;

· вывели формулы для нахождения суммы углов многоугольников, имеющих одно и более самопересечение при различном ориентире.

Для начала остановимся на самом понятии ориентированного многоугольника. Если каждой стороне многоугольника приписать направление (т. е. указать, какую из двух определяющих её вершин принять за начало, а какую – за конец, причем так, чтобы начало каждой стороны являлось также концом предыдущей), то получится замкнутый многоугольный путь, или же **ориентированный многоугольник**.

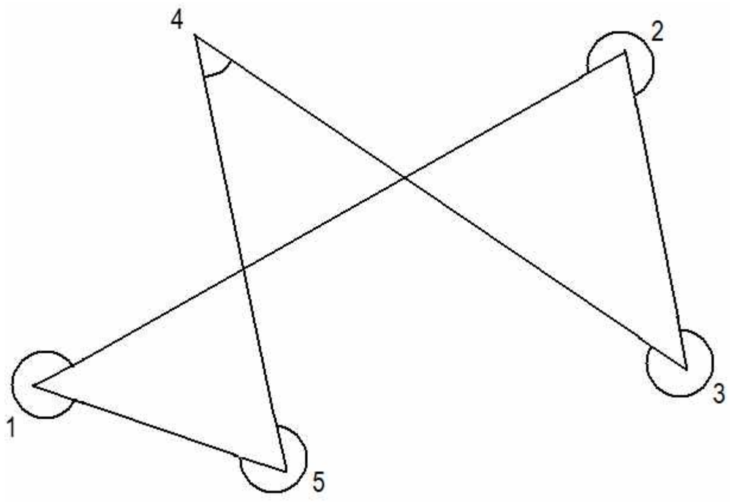


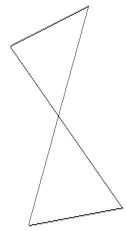
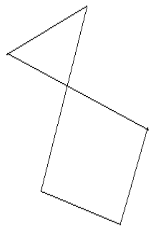
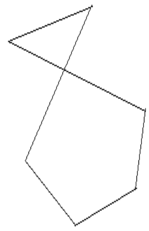
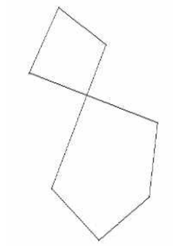
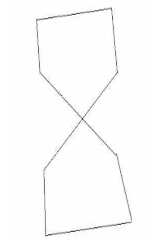
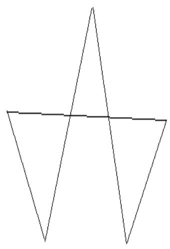
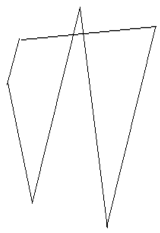
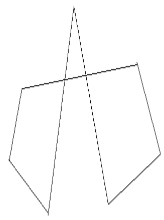
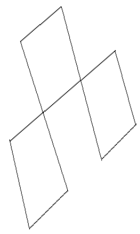
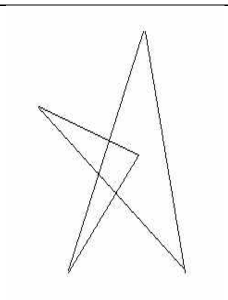
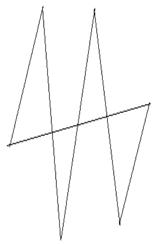
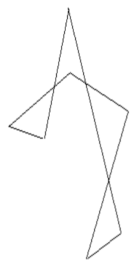
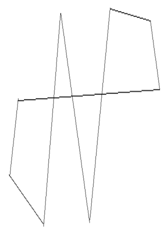
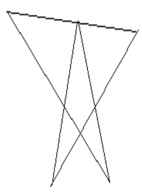
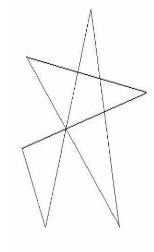
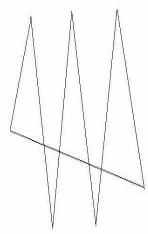
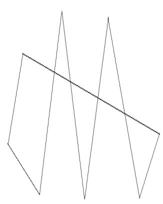
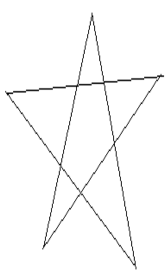
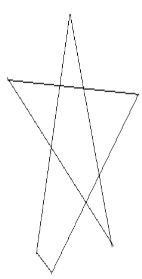
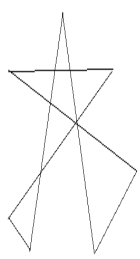
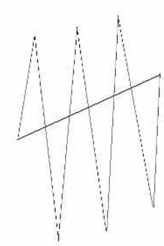
Рисунок 5 – Ориентированный многоугольник

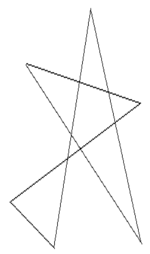
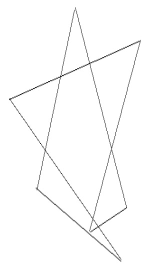
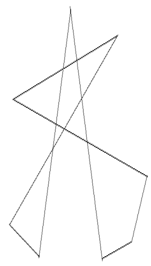
Формулой 180·(n-2) можно найти сумму внутренних углов самопересекающегося многоугольника, однако это возможно сделать лишь в том случае, если корректно определить углы, а это возможно только в том случае, если этот многоугольник является ориентированным. В этом случае в качестве понятия его углов примем угол между соседними сторонами, взятый с одной стороны (например, слева и далее по часовой стрелке) относительно заданного направления.

1ВИДЫ САМОПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрим многоугольники с самопересечением, имеющие различное количество сторон. Если никакие три вершины не лежат на одной прямой и никакие три стороны не пересекаются в одной точке, то максимальное количество самопересечений при нечётном nбудет n· (n-3) /2, а при чётном - n· (n - 4) /2 + 1[3].

Таблица 1.1 – Виды самопересекающихся многоугольников

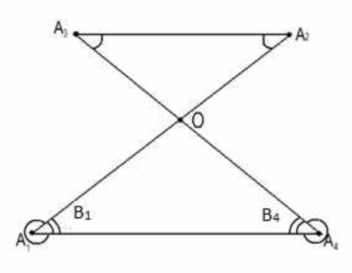
n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8
				
Не существует				
Не существует				
Не существует				
Не существует				

Не существует	Не существует			
Не существует	Не существует	Не существует	…	…

2 ЗНАЧЕНИЯ СУММ УГЛОВ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ С ОДНИМ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЕМ

2.1Значение суммы углов для четырехугольника с самопересечением

Мы рассматриваем ориентированные многоугольники, и угол между соседними сторонами, взятый слева, и далее – по часовой стрелке относительно заданного направления, т.е. задаём ориентир или направление.



Углы $\angle A_1$ и $\angle A_4$ получились как бы внешними (для обычного понимания, согласно школьной программы).

Наша задача: **найти сумму углов** $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 = ?$

Обозначим точку самопересечения O,тогда $\angle A_3OA_2 = \angle A_4OA_1$ (как вертикальные углы), а значит $\angle A_2 + \angle A_3 = \angle B_1 + \angle B_4$. Углы $\angle A_1$ и $\angle A_4$ нашего четырехугольника равны соответственно $360^o - \angle B_1$ и $360^o - \angle B_4$, то есть:

$$\angle A_2 + \angle A_3 = 360^O - \angle A_1 + 360^O - \angle A_4$$

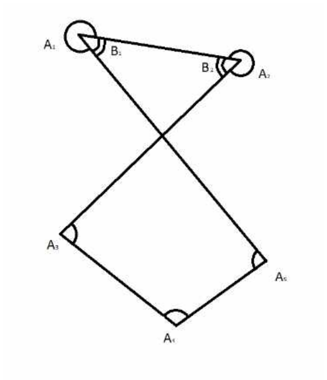
$$\angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_1 + \angle A_4 = 720^O$$

Итак, сумма углов для четырехугольника с самопересечениемравна 720°**.** Если же поменять ориентир, сумма углов все равно останется равной 720°**.**

Утверждение:
Сумма углов у четырехугольника с самопересечением всегда равна 720°.

2.2 Значение суммы углов для пятиугольника с самопересечением

Зададим ориентир данному пятиугольнику:



Рассмотрим этот случай

$$O = A_3A_4 \cap A_1A_2$$

$$\angle A_3OA_2 = \angle A_4OA_1$$

$$180^0 - \angle A_3 - \angle A_2 = 360^O - \angle B_1 - \angle B_4 - \angle B_5$$

$$180^O - \angle A_3 - \angle A_2 = 360^O - (360^O - \angle A_1 + 360^O - \angle A_5 + 360^O - \angle A_4)$$

$$180^O - \angle A_3 - \angle A_2 = 360^O - 360^O + \angle A_1 - 360^O + \angle A_5 - 360^O + \angle A_4$$

$$\angle A_1 + \angle A_5 + \angle A_4 + \angle A_3 + \angle A_2 = 180^O + 360^O + 360^O$$

$$\angle A_2 + \angle A_5 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_1 = 900^O$$

Если ориентировать этот многоугольник по-другому, получим:

$$O = A_3A_4 \cap A_1A_5$$

$$\angle A_4OA_5 = \angle A_3OA_1$$

$$360^0 - \angle A_1 - \angle A_3 - \angle A_2 = 180^O - \angle B_4 - \angle B_5$$

$$360^O - \angle A_1 - \angle A_3 - \angle A_2 = 180^O - (360^O - \angle A_4 + 360^O - \angle A_5)$$

$$360^O - \angle A_1 - \angle A_3 - \angle A_2 = 180^O - 360^O + \angle A_5 - 360^O + \angle A_4$$

$$\angle A_1 + \angle A_5 + \angle A_4 + \angle A_3 + \angle A_2 = 360^O - 180^0 + 360^O + 360^O$$

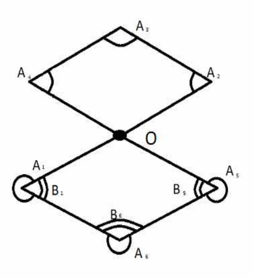
$$\angle A_2 + \angle A_5 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_1 = 900^O$$

Убедились в том, что если поменять ориентир, результат остаётся неизменным.

Утверждение:
Сумма внутренних углов пятиугольника с самопересечением всегда равна 900°.

2.3Значение суммы углов для шестиугольника с самопересечением

Рассмотрим шестиугольник с одним самопересечением:



Доказательство проведём, используя понятие внутренний и внешний угол четырёхугольника.

$\angle A_4OA_2 = \angle A_1OA_5$ (вертикальные), $O = A_1A_2 \cap A_4A_5$;

$360^\circ - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 360^\circ - \angle B_1 - \angle B_5 - \angle B_6$;

$360^\circ - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 360^\circ - (360^\circ - \angle A_1 + 360^\circ - \angle A_5 + 360^\circ - \angle A_6)$;

$360^0 - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 360^\circ - 360^\circ + \angle A_1 - 360^\circ + \angle A_5 - 360^\circ + \angle A_6$;

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 = 360^\circ - 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ$;

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 = 1080^\circ$.

Если же поменять ориентиры, сумма углов всё равно останется равной 1080°.

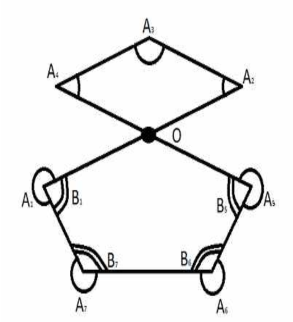
Утверждение:
Сумма внутренних углов шестиугольника с самопересечением всегда равна 1080°.

2.4Значение суммы углов для семиугольника с самопересечением

Рассмотрим семиугольник с одним самопересечением.

Доказательство проведём, используя понятие внешний и внутренний угол четырёхугольника и пятиугольника.

$\angle A_4OA_2 = \angle A_1OA_5$ (как вертикальные), $O = A_1A_2 \cap A_4A_5$;



$360^\circ - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 540^\circ - \angle B_1 - \angle B_5 - \angle B_6 - \angle B_7$;

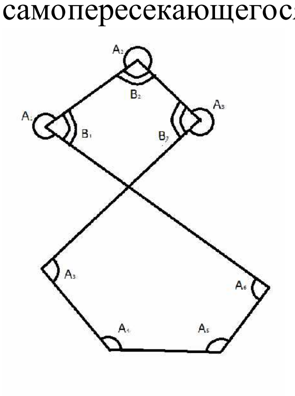
$360^\circ - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 540^\circ - (360^0 - \angle A_1 + 360^\circ - \angle A_5 + 360^\circ - \angle A_6 +$
$+ 360^\circ - \angle A_7)$;

$360^\circ - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 540^\circ - 360^\circ + \angle A_1 - 360^\circ + \angle A_5 - 360^\circ + \angle A_6 - 360^\circ +$
$+ \angle A_7$;

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 + \angle A_7 = 360^0 - 540^\circ + 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ$;

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 + \angle A_7 = 1260^\circ$.

Поменяем ориентир, и посмотрим, чему же будут равна сумма внутренних углов самопересекающегося семиугольника:



$O = A_1A_7 \cap A_4A_5$;

$\angle A_4OA_1 = \angle A_7OA_5$ (вертикальные);

$540^\circ - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 360^\circ - \angle B_5 - \angle B_6 - \angle B_7$;

$540^\circ - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 360^\circ - (360^\circ - \angle A_5 + 360^\circ - \angle A_6 + 360^\circ - \angle A_7)$;

$540^\circ - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 = 360^\circ - 360^\circ + \angle A_5 - 360^\circ + \angle A_6 - 360^\circ + \angle A_7$;

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 + \angle A_7 = 540^\circ - 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ$;

$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_6 + \angle A_7 = 1260^\circ$.

Убедились, что сумма углов осталась прежней.

Утверждение:
Сумма внутренних углов семиугольника с самопересечением всегда равна 1260°.

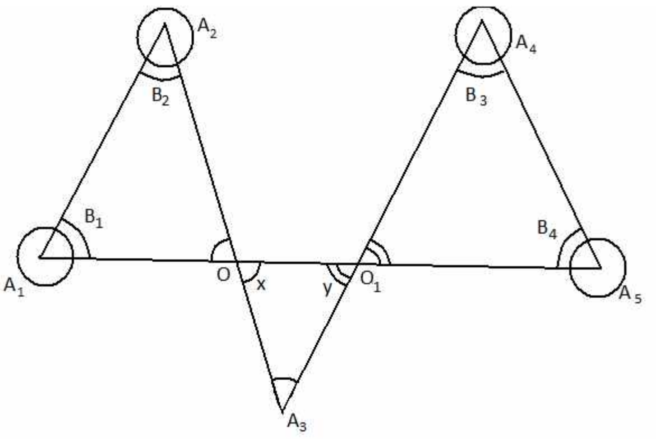
2.5 Обобщение

Таким образом, мы заметили, что сумма внутренних углов многоугольников с одним самопересечением при разных ориентирах всегда будет одна и та же, а значит, формула будет следующая:

$180^\circ \cdot n$, где n – число сторон многоугольника.

3ЗНАЧЕНИЯ СУММ ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ С ДВУМЯ И БОЛЕЕ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ

3.1 Нахождение суммы углов для пятиугольников с двумя самопересечениями



А)Пусть: $O = A_2A_3 \cap A_1A_5$, $O_1 = A_1A_5 \cap A_3A_4$

Введем дополнительные обозначения:x=$\angle A_2OA_1$, аy=$\angle A_4O_1A_5$, и снова: B_1, B_2, B_3, B_4

$$\begin{rcases} B_1 + B_2 + x = 180^o \\ \angle A_3 + y + x = 180^o \\ B_4 + B_3 + y = 180^o \end{rcases} -$$

Сумма углов треугольникахx=180° – B_1 – B_2, y=180° –B_4 – B_3

Из первого уравнения получаем: $x = 180^o - B_4 - B_3$

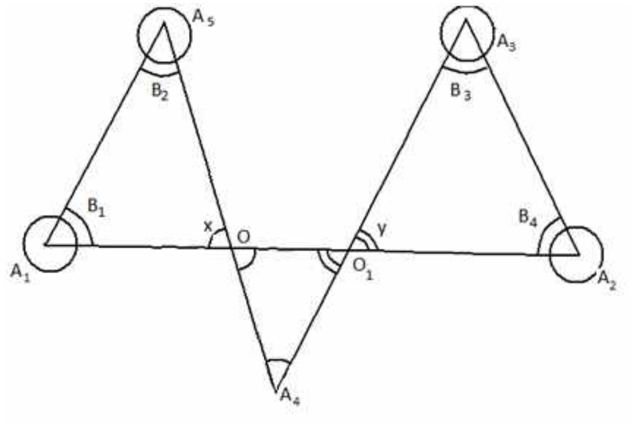
Подставив полученное во второе уравнение, получим:

$$\angle A_3 + 180^o - B_4 - B_3 + 180^o - B_1 - B_2 = 180^o$$

$$\angle A_3 + 180^o - (B_4 + B_3 + B_1 + B_2) = 0$$

$$\angle A_3 + 180^o - (360^o - \angle A_4 + 360^o - \angle A_5 + 360^o + 360^o) = 0$$

$$\angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_1 + \angle A_2 = -180^o + 360^o + 360^o + 360^o + 360^o = 1260^o$$



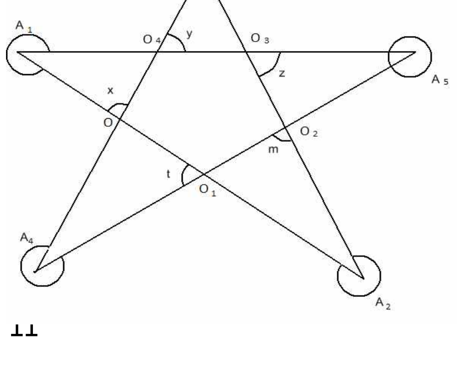
Б) Если же ориентировать данный многоугольник другим способом, то в результате аналогичных расчетов получим:

$$\angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 + \angle A_1 + \angle A_2 = 360^o + 180^o = 540^o$$

Утверждение:
сумма углов пятиугольника с двумя самопересечениями, в зависимости от ориентирования, может быть равна 1260° или 540°.

3.2 Нахождение суммы углов для пятиугольника с большим числом самопересечений

1)Решаем для случая:



$O = A_3A_4 \cap A_1A_2$

$O_1 = A_1A_2 \cap A_4A_5$

$O_2 = A_2A_3 \cap A_4A_5$

$O_3 = A_1A_5 \cap A_2A_3$

$O_4 = A_1A_5 \cap A_4A_3$

Введем:

$\angle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \alpha_5;$

x, y, z, m, t

$OO_1O_2O_3O_4$ – выпуклый пятиугольник, сумма его углов равна 180°. (5-2)=540°

В нашем случае x,y,z,m,t – его внешние углы, а из курса геометрии известно, что их сумма равна 360°:

$\alpha_1 + x + t = 180^o$

$\alpha_4 + x + y = 180^o$

$y + \alpha_2 + z = 180^o$

$z + m + \alpha_5 = 180^o$

$\begin{cases} \alpha_1 = 180^o - x - t \\ \alpha_4 = 180^o - x - y \\ \alpha_2 = 180^o - y - z \\ \alpha_5 = 180^o - z - m \\ \alpha_3 = 180^o - m - t \end{cases}$, из этого получаем:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \\ 360^o - \angle A_1 + 360^o - \angle A_1 + 360^o - \\ - \angle A_1 + 360^o - \angle A_1 + 360^o - \angle A_1 = \\ 5 \cdot 360^o - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 - \angle A_5$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 360^o - \angle A_1 + 360^o - \angle A_2 + 360^o - \angle A_3 + 360^o - \angle A_4 + 360^o - \angle A_5 + 360^o = $ Из

$= 5 \cdot 360^o - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 - \angle A_5$

системы уравнений получаем:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^o \cdot 5 - 2(x + y + z + m + t) = 900 - 2 \cdot 360^o = 180^o$

То есть получаем уравнение:

$180^0 = 1800^0 - \angle A_1 - \angle A_2 - \angle A_3 - \angle A_4 - \angle A_5$

Или $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 + \angle A_5 = 1800^0 - 180^0 = 1620^0$

Для второго случая замечаем, что там $\angle A_1$, а в этом случае это α_1 и т.д. В уравнение показано, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^0$.

Утверждение:
Для пятиугольника «звезда» сумма углов может быть равна 1620° или 180°. Это тоже зависит от направления.

2)Для данного случая:

$\alpha_1 + x + t = 180^0$

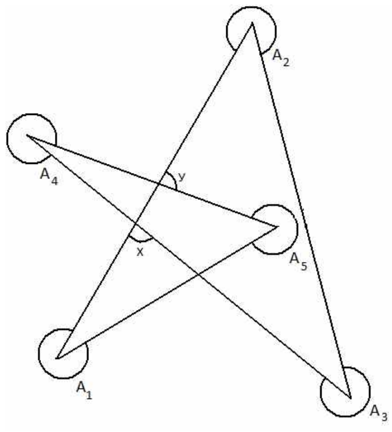
$\alpha_4 + x + y = 180^0$

$180^0 - y + \alpha_5 + 180^0 - t + 180^0 - x = 360^0$

$\alpha_2 + \alpha_3 + 180^0 - x = 180^0$

$180^0 - y + \alpha_1 + \alpha_5 = 180^0$

$\alpha_4 + \alpha_5 + 180^0 - t = 180^0$



$\alpha_1 = 180^0 - x - t$

$\alpha_4 = 180^0 - x - y$

$\alpha_5 = 360^0 - 180^0 - 180^0 - 180^0 + y + z + x =$

$= x + y + z - 180^0$

$\alpha_2 + \alpha_3 = x$

$\alpha_1 + \alpha_5 = 180^0 - 180^0 + y = y$

А) $\alpha_4 + \alpha_5 = t$

Производим расчет:

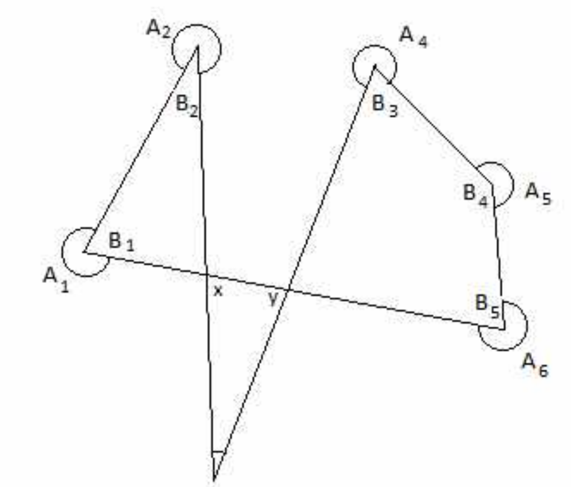
$360^0 \times 5 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = 1800^0 - 180^0 = 1620^0$

Б) Если ориентировать данный многоугольник иным способом, то получим:

$y + x + 180^0 - x - y = 180^0$

Утверждение:
Сумма углов для пятиугольника с тремя самопересечениями, в зависимости от ориентирования может быть равна 1620° или 180°.

3.3 Нахождение суммы углов для многоугольников с двумя и более самопересечениями



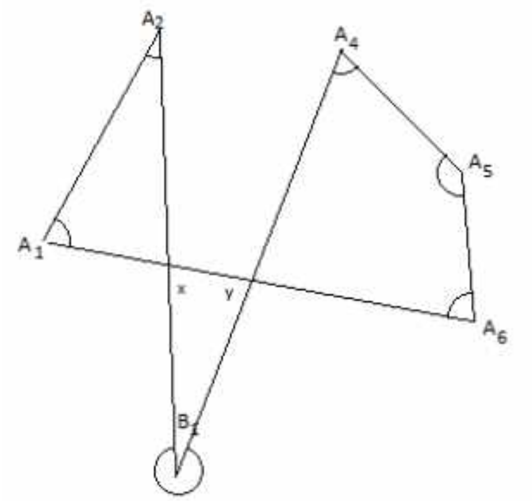


Рисунок 3.1 – Внешний оринетир Рисунок 3.2 – Внутренний оринтир

Для внешнего ориентира:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + x = 180^\circ \\ A_3 + x + y = 180^\circ \\ B_3 + B_4 + B_5 + y = 360^\circ \end{cases}$$

Решим систему аналогично со случаем пятиугольника с двумя самопересечениями.

Утверждение:
Сумма внутренних углов шестиугольника с двумя самопересечениями равна 1440° либо 720°, в зависимости от ориентира.

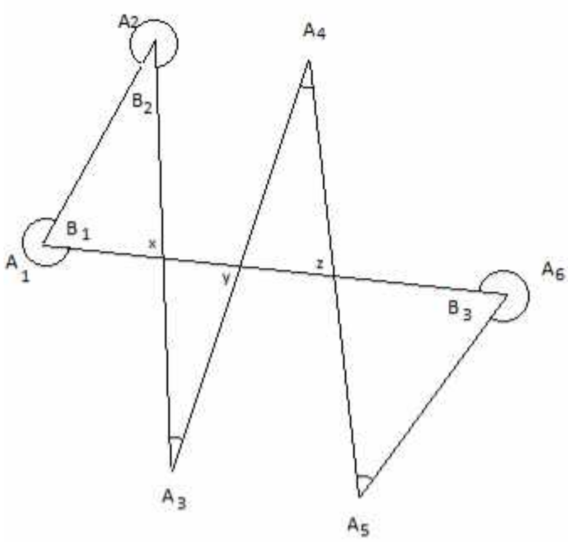


Рисунок 3.3 – Внутренний ориентир

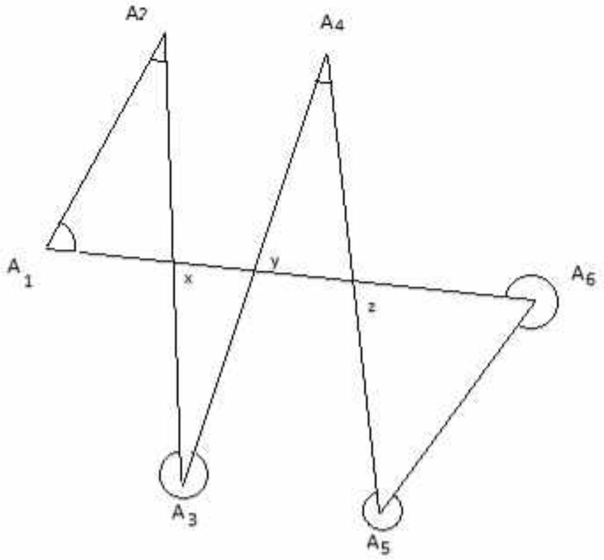


Рисунок 3.4 – Внешний ориентир

Для внешнего ориентира:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + x = 180^\circ \\ B_1 + x + y = 180^\circ \\ A_4 + y + z = 180^\circ \\ B_2 + B_3 + z = 180^\circ \end{cases}$$

Решим систему аналогично со случаем пятиугольника с двумя самопересечениями.

Утверждение:
Сумма внутренних углов шестиугольника с тремя самопересечениями равна 1080° либо 1080°, в зависимости от ориентира.

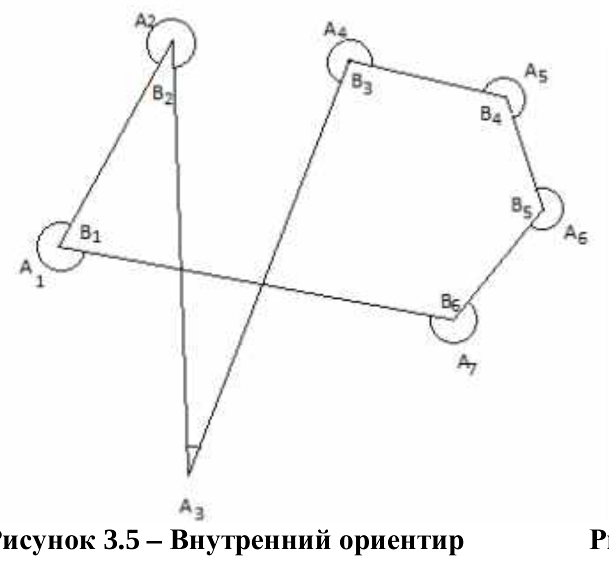


Рисунок 3.5 – Внутренний ориентир

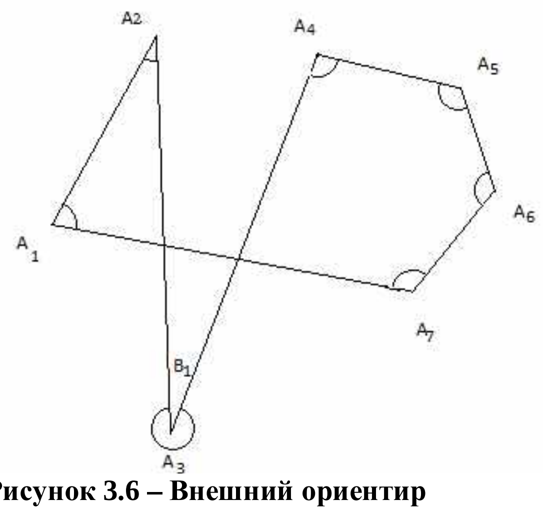


Рисунок 3.6 – Внешний ориентир

Для внешнего ориентира:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + x = 360° \\ B_1 + x + y = 180° \\ A_5 + A_6 + A_7 + y = 180° \end{cases}$$

Решим систему аналогично со случаем пятиугольника с двумя самопересечениями.

Утверждение:
Сумма внутренних углов семиугольника с двумя самопересечениями равна 1260° либо 1260°, в зависимости от ориентира.

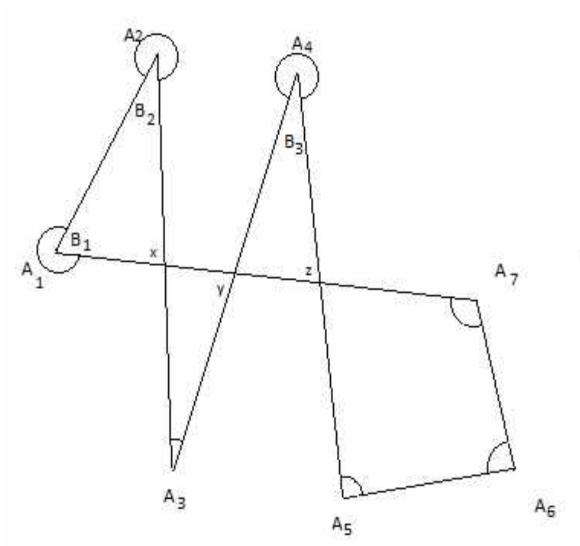


Рисунок 3.7 – Внутренний ориентир

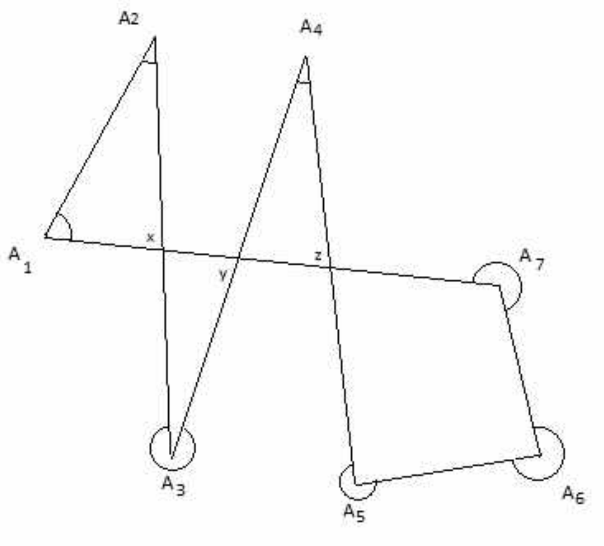


Рисунок 3.8 – Внешний ориентир

Для внешнего ориентира:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + x = 180° \\ B_1 + x + y = 180° \\ A_4 + y + z = 180° \\ B_2 + B_3 + B_4 + z = 360° \end{cases}$$

Решим систему аналогично со случаем пятиугольника с двумя самопересечениями.

Утверждение:
Сумма внутренних углов семиугольника с тремя самопересечениями равна 1260° либо 1260°, в зависимости от ориентира.

3.3 Обобщение

Таким образом, мы нашли сумму внутренних углов пятиугольника, шестиугольника и семиугольника с двумя и тремя самопересечениями. Так же мы заметили, что сумма внутренних углов многоугольников с самопересечениями зависит от количества самопересечений:

Таблица 3.1 – Общая сумма углов пятиугольника

Кол-во самопересечений	Сумма углов при внешнем ориентире	Сумма углов при внутреннем ориентире	Общая сумма
1	900°	900°	1800°
2	1260°	540°	1800°
3	1620°	180°	1800°
4	1260°	540°	1800°
5	900°	900°	1800°

Таблица 3.2 – Общая сумма углов шестиугольника

Кол-во самопересечений	Сумма углов при внешнем ориентире	Сумма углов при внутреннем ориентире	Общая сумма
1	1080°	1080°	2160°
2	1440°	720°	2160°
3	1080°	1080°	2160°
4	1440°	720°	2160°
5	1620°	540°	2160°

Таблица 3.3 – Общая сумма углов семиугольника

Кол-во самопересечений	Сумма углов при внешнем ориентире	Сумма углов при внутреннем ориентире	Общая сумма
1	1260°	1260°	2520°
2	1260°	1260°	2520°
3	1260°	1260°	2520°
4	1260°	1260°	2520°
5	1260°	1260°	2520°
…	…	…	…
14	1260°	1260°	2520°

$180° \cdot n$, если нечетное количество самопересечений.
$180° \cdot (n + 2)$, если четное количество самопересечений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы рассмотрели различные виды невыпуклых многоугольников с самопересечением, попытались найти закономерность построения таких многоугольников и нашли некоторые их свойства:

· сумма внутренних углов невыпуклого четырехугольника с одним самопересечением равна 720°;

· сумма внутренних углов невыпуклого пятиугольника с одним самопересечением равна 900°;

· сумма внутренних углов невыпуклого шестиугольника с одним самопересечением равна 1080°;

· сумма внутренних углов невыпуклого семиугольника с одним самопересечением равна 1260°;

· заметили, что сумма внутренних углов многоугольников с одним самопересечением при разных ориентирах всегда будет одна и та же, а значит, формула будет следующая: $180^\circ \cdot n$, где n – число сторон многоугольника;

· сумма внутренних углов многоугольника с двумя и более самопересечениями находится по формуле $180^\circ \cdot n$, если количество самопересечений – четное, и $180^\circ \cdot (n + 2)$, если нечетное.

В дальнейшем планируем найти другие свойства невыпуклых многоугольников с самопересечениями и, может быть, найти связь нашей работы в практической деятельности человека.

Практическое значение результатов предполагает использование их на факультативных занятиях по математике, математических олимпиадах, конкурсах с целью развития творческих способностей учащихся.А также данная разработка может быть внедрена в школах, гимназиях для изучения сложного материала, выходящего за рамки программы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Геометрия: учеб.пособие для 9-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения/В.В.Шлыков. –3-е изд., испр. – Минск: Нар. асвета, 2012. – 165с.

2. Математическая энциклопедия /Под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия,1977—1985.

3. Максимальное количество самопересечений у замкнутой ломаной[Электронный ресурс]. – Режим доступа:http://www.mathforum.ru/forum/read/1/5269/5269/. – Дата доступа :21.10.2020