XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс научно-исследовательских работ учащихся средних, средних специальных учебных заведений и студентов вузов «От Альфа к Омеге…» (с международным участием)
Секция. Алгебра, геометрия и математический анализ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Гимназия № 3 г. Бреста»

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ОТРЕЗКИ

Козинец Руслан Николаевич,
учащийся 10 класса

Литвинович Нина Владимировна,
учитель математики и информатики
ГУО «Гимназия № 3 г. Бреста»,
высшая кв. категория учителя математики и информатики

Брест, 2021

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ОТРЕЗКИ

Р. Н. Козинец
ГУО «Гимназия № 3 г. Бреста», 10 класс,
Брест, Беларусь

Научный руководитель – Н. В. Литвинович, учитель математики и информатики ГУО «Гимназия № 3 г. Бреста», высшая кв. категория учителя математики и информатики.

Работа 19 с., 3 ч., 23 рис., 5 источников.

Ключевые слова:четырехугольник, параллельные прямые, биссектриса угла.

В работе рассматривается пересечение отрезков, соединяющих вершины и середины сторон разных видов четырёхугольников, пересечение биссектрис углов прямоугольника и параллелограмма, пересечение квадрата и ромба отрезками, лежащими на параллельных прямых, выводятся формулы площадей получившихся фигур, делается обобщение задач, рассматриваются свойства звездчатого шестиугольника, получившегося в результате пересечения трех ромбов.

Объектом исследования является четырехугольник.

Цель работы – рассмотреть пересечение отрезков и разных видов четырехугольников, сделать обобщения задач.

Работа посвящена изучению свойств четырехугольников.

В результате исследования впервые были получены следующие результаты.

Если каждая вершина параллелограмма соединена с серединой стороны, которая лежит между двумя следующими вершинами (считать вершины в одинаковом порядке), то отрезки своим пересечением образуют параллелограмм, площадь которого равна пятой части площади исходного параллелограмма. Если исходная фигура прямоугольник или квадрат, то получается частный случай. Для квадрата в пересечении получится тоже квадрат.

Для произвольного выпуклого четырёхугольника ABCD в этом случае получил: еслиE, F, K, L – середины сторон, то площадь четырехугольника, образованного прямыми EC, AK, BL, FD, равна сумме площадей четырех треугольников.

При пересечении биссектрис углов параллелограмма получится прямоугольник, площадь которого равна $\frac{(b-a)^2\sin\alpha}{2}$, где a, b - стороны параллелограмма, α – острый угол. Если исходная фигура прямоугольник, то получится частный случай. Формула для вычисления площади будет верна, так как α=90°, sin90°=1.

Если ромб ABCD с высотой a пересечен отрезками MN и PQ, лежащими на параллельных прямых, находящимися на расстоянии a, то отрезки MQ и NP пересекаются под углом, равным половине тупого угла ромба (в случае квадрата будет угол 45°). Противоположные вершины ромба и точка пересечения отрезков лежат на одной прямой.

При наложении трех ромбов с одинаковой высотой доказаны свойства получившегося звездчатого шестиугольника. Отрезки, исходящие из его острых противоположных углов, пересекаются в одной точке. Отрезки же, исходящие из его противоположных неострых углов попарно пересекаются и образуют треугольник.

Работа может быть использована на уроках геометрии, на факультативах, при подготовке к олимпиадам, на внеклассных мероприятиях по математике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решая ту или иную задачу, мы получаем решение только применительно к данному конкретному условию. Между тем, в ее содержании, как правило, имеются такие важные связи и отношения, которые не всегда выявляются в процессе решения.

Обобщение задачиосуществляется путем такого изменения данных и искомых задачи, при котором исходная задача становится частным случаем задачи-обобщения или ее элементом. В своей работе я рассматриваю пересечение четырехугольников и отрезков и делаю обобщения задач. Тема работы «Четырехугольники и отрезки».

Актуальность работы объясняется тем, что обобщения рассматриваемых задач не проводились. Условия задач о пересечении биссектрис прямоугольника и параллелограмма, задача о пересечении отрезков, соединяющих вершины и середины сторон квадрата и прямоугольника, есть в учебниках, но определить нужно только вид фигуры. Задачи о пересечении квадрата и ромба отрезками, лежащими на параллельных прямых, нигде не встречаются, но в Интернете в «Архиве номеров Кванта» есть условие задачи о полосе и квадрате, которая рассматривается в работе.

Практическая значимость.Работа может быть использована на уроках геометрии, на факультативах, при подготовке к олимпиадам, на внеклассных мероприятиях по математике.

Цель: рассмотреть пересечение отрезков и разных видов четырехугольников, сделать обобщения задач.

Задачи:

1. Рассмотреть пересечение отрезков, соединяющих вершины и середины сторон четырехугольника.
2. Рассмотреть пересечение биссектрис углов прямоугольника и параллелограмма.
3. Рассмотреть пересечение квадрата и ромба отрезками, лежащими на параллельных прямых.
4. Сделать обобщения задач.

Гипотеза: при пересечении четырехугольников отрезками получаются фигуры, вид которых можно определить и в общем случае вывести формулу для нахождения их площади.

1 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ОТРЕЗКОВ, СОЕДИНЯЮЩИХ ВЕРШИНЫ И СЕРЕДИНЫ СТОРОН ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

1.1 Пересечение отрезков, соединяющих вершины и середины сторон квадрата

Рассмотрим задачу. Вершины квадрата ABCDсоединены с серединами сторон так, как показано на рисунке 1.1. Определим вид четырехугольника FKLM, и какую часть площади квадрата составляет площадь FKLM [1, с. 46].

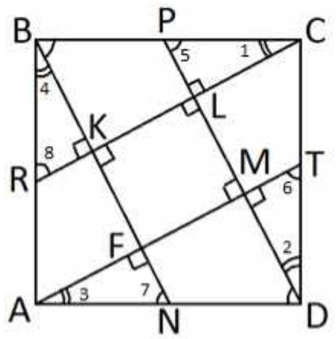

Рисунок 1.1

Решение:$\Delta RBC = \Delta PCD = \Delta TDA = \Delta NAB$ – по 2-м катетам (BC=CD=AD=AB– стороны квадрата, RB=PC=TD=NA– половины сторон квадрата). Значит, равны соответствующие углы: Ð1=Ð2=Ð3=Ð4, Ð5=Ð6=Ð7=Ð8.

В прямоугольном ΔRBC: ÐR+ÐC= 90˚. В ΔRBK: ÐR+ÐB=90˚. Значит, ÐRKB=90˚. Аналогично, ÐPLC=ÐTMD=ÐNFA=90˚.Тогда, FKLM–прямоугольник.

$\Delta BCK=\Delta CDL=\Delta DAM=\Delta ABF$ по острому углу и гипотенузе, значит, CK=DL. $\Delta PCL=\Delta TDM$ по острому углу и гипотенузе, значит, CL= DM. Следовательно, CK–CL=DL–DM, значит, KL=LM. Тогда, прямоугольник FKLM– квадрат.

Пусть сторона квадрата равна a. В ΔRBC по теореме Пифагора $RC=\sqrt{BC^2+RB^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$.

$\Delta RBC \sim \Delta BKC$ по 2-м углам. Значит, $\frac{BC}{KC}=\frac{RC}{BC}$; $KC=BC^2 : RC=a^2:\frac{a}{2}\sqrt{5}=a^2\cdot\frac{2}{a\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

В ΔBKC по теореме Пифагора $BK=\sqrt{BC^2-KC^2}=\sqrt{a^2-\frac{4a^2}{5}}=\sqrt{\frac{a^2}{5}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$.

$S_{BCK}=\frac{1}{2}BK\cdot KC=\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{5}}=\frac{a^2}{5}$.$S_{FKLM}=a^2-4S_{BCK}=a^2-\frac{4a^2}{5}=\frac{a^2}{5}=\frac{1}{5}S_{ABCD}$.

Значит, площадь квадрата FKLM составляет пятую часть площади исходного квадрата.

1.2Пересечение отрезков, соединяющих вершины и середины сторон прямоугольника

Заменим в задаче квадрат на прямоугольник ABCD (рисунок 1.2).

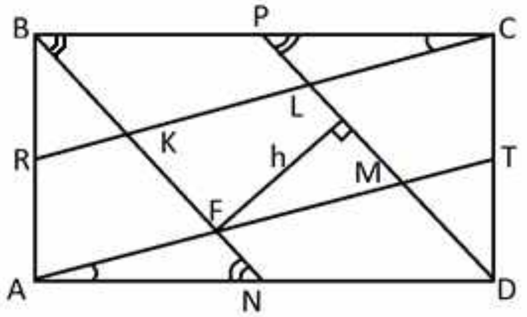

Рисунок 1.2

Решение: Пусть AB=a, BC=b, и a<b.NBPD – параллелограмм, т.к. BP||ND и BP=ND=$\frac{1}{2}$b. Тогда NB||PD, значит, FK||LM. Аналогично, ARCT– параллелограмм, тогда KL||FM. Следовательно, FKLM– параллелограмм (по определению).

S_{NBPD}=ND·AB=$\frac{1}{2}$ba=$\frac{ab}{2}$. S_{NBPD}=BN·h, где h– расстояние между параллельными прямыми NB и PD.

RC||AT, BC||AD, то ÐBCR=ÐDAT, BN||PD, BC||AD, то ÐCPL=ÐANF (углы с соответственно параллельными сторонами).

ΔANF = ΔCPL (AN=PC= $\frac{b}{2}$ и равны углы из п. 4). Пусть PL=FN= x.

ΔBCK~ΔPCL по 2-м углам, то $\frac{BC}{PC}$= $\frac{BK}{PL}$ = 2. BK= 2PL=2x.

Аналогично, ΔABF~ ΔRBK, BF=2BK=4x. BN=BF+FN=4x+x=5x.

В ΔABN по теореме Пифагора BN=$\sqrt{AB^2 + AN^2}$=$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ =$\frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{2}$.

x=BN:5=$\frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{10}$. KF=BK=2x=$\frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{5}$.

h= $\frac{S_{NBPD}}{BN}$ = $\frac{ab}{2}$: $\frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{2}$=$\frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

S_{FKLM}=KF·h=$\frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{5}$· $\frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$= $\frac{ab}{5}$= $\frac{1}{5}$$S_{ABCD}$.

Значит, площадь параллелограмма FKLM составляет пятую часть площади прямоугольника.

1.3Пересечение отрезков, соединяющих вершины и середины сторон параллелограмма

Рассмотрим параллелограммABCD. Вершины параллелограмма соединены с серединами сторон (рисунок 1.3). Определим вид четырехугольника FKLM и какую часть площади параллелограмма составляет площадь FKLM [2, с.27].

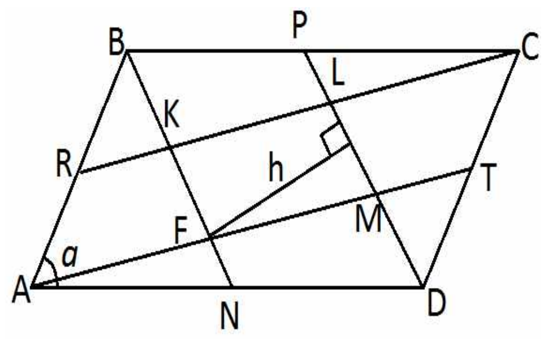

Рисунок 1.3

Решение: Пусть AB=a, BC=b (a<b), и острый угол равен α. Аналогично, как и для прямоугольника, можно доказать, что FKLM – параллелограмм.

S_{ABCD}=ab·sinα; S_{NBPD}=$\frac{ab}{2}$·sinα= $\frac{1}{2}$$S_{ABCD}$. Тогда S_{NBPD}=BN·h.

Пусть PL=x. Рассуждая, как и в предыдущей задаче, получим BN=5x.

В ΔABN по теореме косинусов BN=$\sqrt{AB^2 + AN^2 - 2 \cdot AB \cdot AN \cdot \cos a}$= $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos a}$ =$\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab \cdot \cos a}$.

x=BN:5= $\frac{1}{10}\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab \cdot \cos a}$. KF=BK=2x = $\frac{1}{5}\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab \cdot \cos a}$.

h= $\frac{S_{NBPD}}{BN}$= $\frac{ab \cdot \sin a}{2}$: $\frac{\sqrt{4a^2+b^2-4ab \cdot \cos a}}{2}$ = $\frac{ab \cdot \sin a}{\sqrt{4a^2+b^2-4ab \cdot \cos a}}$.

S_{FKLM} = KF·h = $\frac{\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cdot\cos\alpha}}{5} \cdot \frac{ab\cdot\sin\alpha}{\sqrt{4a^2 + b^2 - 4ab\cdot\cos\alpha}} = \frac{ab\cdot\sin\alpha}{5} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$.

Значит, площадь параллелограмма FKLM составляет пятую часть площади исходного параллелограмма.

Таким образом получили: если каждая вершина параллелограмма соединена с серединой стороны, которая лежит между двумя следующими вершинами (считать вершины в одинаковом порядке), то отрезки своим пересечением образуют параллелограмм, площадь которого равна пятой части площади исходного параллелограмма. Если исходная фигура прямоугольник или квадрат, то получим частный случай.

1.4Пересечение отрезков, соединяющих вершины и середины сторон произвольного четырехугольника

Рассмотрим произвольный четырёхугольник. Пусть E, F, K, L – середины сторон выпуклого четырехугольника ABCD (рисунок 1.4). Докажем, что площадь четырехугольника, образованного прямыми EC, AK, BL, FD, равна сумме площадей четырех треугольников, отмеченных на рисунке 1.4 [3].

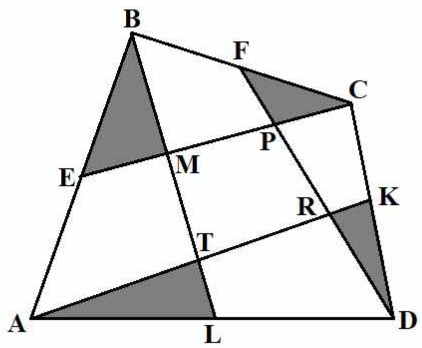

Рисунок1.4

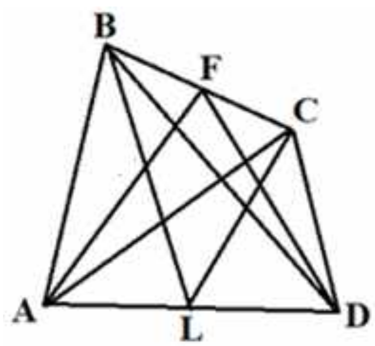

Рисунок 1.5

Доказательство:Пусть Fи L– середины противоположных сторон BC и ADчетырехугольника ABCD (рисунок 1.5). Проведем отрезки AC, CL, AF, BL, BD, DF.

В ΔACD медиана CLделит его на два треугольника равной площади, т.е. $S_{ACL}=S_{DCL}$, а в ΔABC медиана AFделит его на два равновеликих треугольника, т.е. $S_{BAF}=S_{CAF}$. $S_{AFCL}=S_{CAF}+S_{ACL}$, тогда $S_{AFCL}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Аналогично, $S_{LBFD}=S_{BDL}+S_{BDF}$ и $S_{LBFD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Пусть EC∩BL=M, EC∩FD=P, AK∩BL=T, AK∩FD=R (рисунок 1.4). Известно, что $S_{AECK}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, $S_{DLBF}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

$S_{ABCD}=S_{AECK}+S_{DLB}-S_{MPRT}+S_{\Delta\text{-ов}}$.

$S_{\Delta\text{-ов}}=S_{ABCD}-S_{AECK}-S_{DLBF}+S_{MPRT}=S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABCD}+S_{MPRT}=S_{MPRT}$.

Значит, площадь четырехугольника MPRT равна сумме площадей четырех треугольников.

Рассмотрим задачу. Противоположные стороны четырёхугольника ABCD разделены на три равные части и точки деления попарно соединены (рисунок 1.6), то площадь той части четырёхугольника, которая заключена между этими отрезками, в три раза меньше площади самого четырёхугольника. $S_{EGHF}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$ [4].

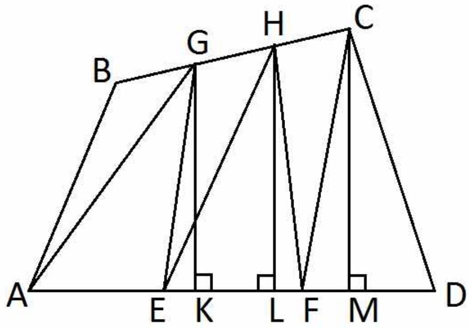

Рисунок 1.6

Доказательство: $GK \perp AD$, $HL \perp AD$, $CM \perp AD$. $GH = HC$, $GK \| HL \| CM$, то $KL = LM$.

KGCM– трапеция, HL– еёсредняялиния. $HL = \frac{GK + CM}{2}$;

$S_{AGE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot GK$, $S_{FCD} = \frac{1}{2} \cdot FD \cdot CM$.

$S_{EHF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot HL = \frac{1}{2} EF \cdot \frac{GK + CM}{2} = \frac{EF \cdot (GK + CM)}{2 \cdot 2} = \frac{EF \cdot GK}{2 \cdot 2} + \frac{EF \cdot CM}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot AE \cdot GK + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot FD \cdot CM = \frac{1}{2} S_{AGE} + \frac{1}{2} S_{FCD} = \frac{1}{2}(S_{AGE} + S_{FCD})$.

Аналогично, $S_{GEH} = \frac{1}{2}(S_{ABG} + S_{FHC})$.$2S_{EGHF} = S_{ABGE} + S_{FHCD}$.

$S_{EGHF} = S_{EHF} + S_{GEH} = \frac{1}{2}(S_{AGE} + S_{FCD}) + \frac{1}{2}(S_{ABG} + S_{FHC}) = \frac{1}{2}(S_{AGE} + S_{FCD} + S_{ABG} + S_{FHC}) = \frac{1}{2}(S_{ABGE} + S_{FHCD})$.

$2S_{EGHF} = S_{ABGE} + S_{FHCD}$.

Т.к. $S_{EGHF} = S_{ABCD} - S_{ABGE} - S_{FHCD}$ и $S_{EGHF} = \frac{S_{ABGE} + S_{FHCD}}{2}$, то приравняем правые части уравнений:

$S_{ABCD} - S_{ABGE} - S_{FHCD} = \frac{S_{ABGE} + S_{FHCD}}{2}$

$2S_{ABCD} - 2S_{ABGE} - 2S_{FHCD} = S_{ABGE} + S_{FHCD}$

$2S_{ABCD} = 3S_{ABGE} + 3S_{FHCD}$

$S_{ABCD} = \frac{3}{2}(S_{ABGE} + S_{FHCD})$.

Т.к. $S_{ABGE} + S_{FHCD} = 2S_{EGHF}$, то $S_{ABCD} = \frac{3}{2} \times 2S_{EGHF} = 3S_{EGHF}$.

Тогда $S_{EGHF} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$. Что и требовалось доказать.

2 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ БИССЕКТРИС УГЛОВ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

2.1 Пересечение биссектрис углов прямоугольника

Проведены биссектрисы углов прямоугольника ABCD со сторонами a и b. Определим вид четырехугольника FKLM, образованного биссектрисами, и найдем его площадь [1, с. 46].

Решение. Пусть a<b. Рассмотрим три случая: при $a = \frac{b}{2}$, $a<\frac{b}{2}$,$a>\frac{b}{2}$.

Пусть a<b, $a = \frac{b}{2}$ (рисунок 2.1).

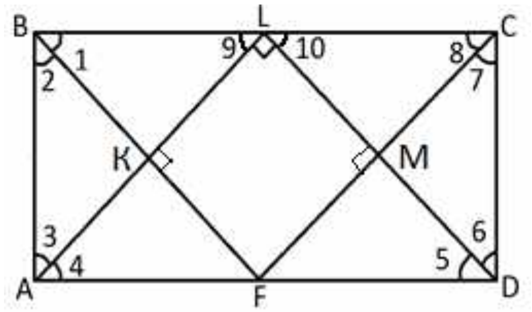

Рисунок 2.1

Т.к. AL, BF, CF, DL – биссектрисы углов прямоугольника, то углы 1,2,3,4,5,6,7,8 равны по 45˚.В ΔABLÐ9 = 45˚, в ΔDCLÐ10 = 45˚(сумма углов треугольника 180˚).

В ΔABKÐK=180˚-Ð2-Ð3= 90˚.В ΔCMDÐM = 180˚- Ð7 - Ð6 = 90˚.

ΔALDÐL = 180˚-Ð4 - Ð5 = 90˚. ÐKFM = 90 ˚, т.к. сумма углов четырёхугольника 360˚. FKLM – прямоугольник, т.к. все углы по 90˚.

ΔBKL = ΔCML по гипотенузе и острому углу (BL=CL= $\frac{b}{2}$,Ð9 = Ð10 = 45˚). Тогда LK = LM, значит, LK = FM = LM = KM. Значит, FKLM – квадрат.

ΔFCD – равнобедренный, FC ⊥ DM, Δ FMD – прямоугольный.

В прямоугольном ΔMDFFM = FD · sin45˚= $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.$S_{FKLM} = FM^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ответ: $\frac{a^2}{2}$

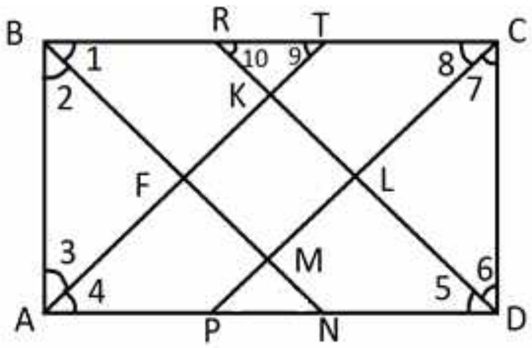

Рисунок 2.2

Пусть a<b, $a>\frac{b}{2}$ (рисунок 2.2).Как и в предыдущей задаче углы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 равны по 45˚.

В ΔABFÐF = 180˚- Ð2 - Ð3 = 90˚. В ΔCLDÐL = 180˚- Ð7 - Ð6 = 90˚. В ΔAKDÐK= 180˚- Ð4 - Ð5 = 90˚. ÐFML = 90˚, т.к. сумма углов четырёхугольника 360˚.

FKLM – прямоугольник (углы по 90˚).

ΔBFA = ΔCLD(по гипотенузе и острому углу), тогда BF = CL.

ΔBFT, Δ CLR – равнобедренные, тогда BF = CL = FT = RL. Δ RKT – равнобедренный, тогда RK = TK.

Тогда, RL – RK = FT – TK, значит, FK = LK. FK = LK = ML = FM, то FKLM – квадрат.

В прямоугольном ΔTFBBT=a, Ð1 = 45˚. FT= BT sin45° = $a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Впрямоугольном ΔRKT RT = 2a – b. KT = RT sin45°= (2a – b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

FK=FT–KT = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ - (2a–b)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$(a-2a+b) = (b– a)$\frac{\sqrt{2}}{2}$. S_{FKLM} = FK^2= $\frac{(b-a)^2}{2}$.

Ответ: $\frac{(b-a)^2}{2}$.

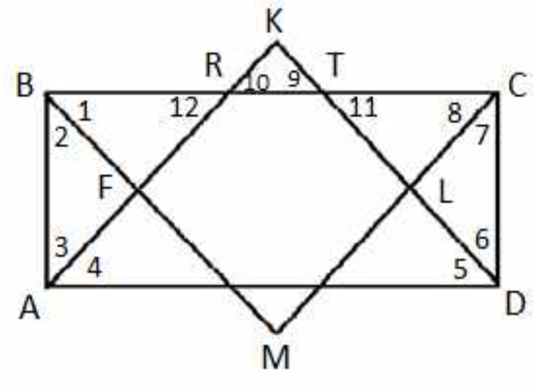

Рисунок 2.3

Пусть a<b, a<$\frac{b}{2}$ (рисунок 2.3). Углы 1,2,3,4,5,6,7,8,11,12 по 45˚, Ð10=Ð12, Ð9=Ð11, как вертикальные.Аналогично, FKLM – прямоугольник.

ΔAKD – равнобедренный, AK = KD. ΔABF = ΔDCL (по гипотенузе и острому углу), AF = DL.

AK – AF = KD – DL, то KF = KL.Значит, KF = FM = ML = KL, тогда FKLM – квадрат.

ΔRFB – прямоугольный, FR = BRsin45 $^\circ$= $a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΔRKT– прямоугольный. RT = b – 2a, RK= RT sin45°= (b – 2a)$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

FK = FR + RK = $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ + (b – 2a)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = (b – a)$\frac{\sqrt{2}}{2}$. S_{FKLM} = FK^2= $\frac{(b-a)^2}{2}$.

Ответ: $\frac{(b-a)^2}{2}$.

Заметим, что в случае пересечения биссектрис углов прямоугольника при a= $\frac{b}{2}$ формулаS_{FKLM} = $\frac{(b-a)^2}{2}$ будет верна. При этом получим S_{FKLM} =$\frac{a^2}{2}$.

2.2Пересечение биссектрис углов параллелограмма

Заменим в задаче прямоугольник на параллелограмм. Докажем, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма, пересекаясь, образуют прямоугольник [1, с. 14].

Проведены биссектрисы углов параллелограмма ABCD со сторонами a и b, и острым углом *a*. При пересечении биссектрис образовался четырехугольника FKLM, найдем его площадь

Решение:Пусть a<b. Рассмотрим три случая: при a = $\frac{b}{2}$, a<$\frac{b}{2}$,a>$\frac{b}{2}$.

Пусть a<b, a = $\frac{b}{2}$ (рисунок 2.4).

Т.к. AK и CM – биссектрисы углов параллелограмма, то Ð1=Ð2=Ð5=Ð6 и Ð3=Ð4=Ð7=Ð8.

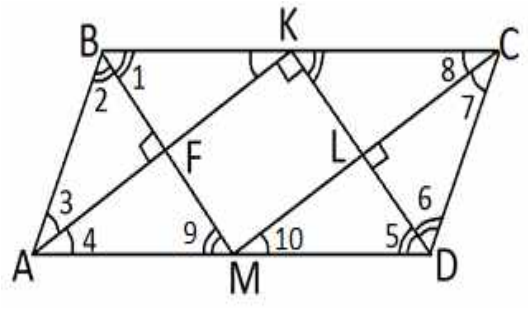

Рисунок 2.4

Ð1=Ð9, Ð8=Ð10, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых.

В параллелограмме ÐA + ÐB = 180°, то Ð2 + Ð3 = 90°. В ΔBFAÐBFA =180°-90°=90°.

Аналогично, ÐCLD=90°. Ð4+ Ð5 = 90°, тогда в ΔAKDÐAKD = 90°.

ÐFML = 90˚, т.к. сумма углов четырёхугольника 360˚. FKLM – прямоугольник, т.к. все углы по 90˚.

ΔABM – равнобедренный, т.к. Ð2=Ð9. ÐA = a, AB=AM = a. Впрямоугольном ΔAFMÐFAM=$\frac{a}{2}$,FM = AMsin$\frac{a}{2}$ = asin$\frac{a}{2}$;

ΔCDM – равнобедренный, CD=DM= a, ÐCDM= 180°- a,ÐLDM = 90°- $\frac{a}{2}$.

ΔMLD – прямоугольный. ML = MD sinÐLDM = a sin(90°- $\frac{a}{2}$)= a cos$\frac{a}{2}$.

S_{FKLM}= FM · ML = a sin$\frac{a}{2}$a cos$\frac{a}{2}$ = $\frac{a^2 \cdot 2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}}{2}$= $\frac{a^2\sin a}{2}$.

Ответ: $\frac{a^2\sin a}{2}$.

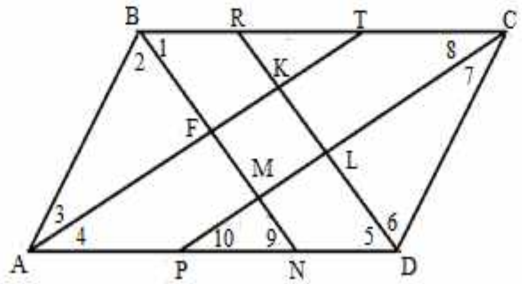

Рисунок 2.5

Пусть a<b, a>$\frac{b}{2}$ (рисунок 2.5).По предыдущей задаче равны углы Ð1=Ð2=Ð5=Ð6=Ð9 и Ð3=Ð4=Ð7=Ð8=Ð10.Аналогично ÐBFA=ÐCLD=ÐAKD=ÐFML=90 ° и FKLM–прямоугольник.ΔABN–равнобедренный, AB= AN = a.

В ΔAFNÐFAN=$\frac{a}{2}$, FN = ANsin$\frac{a}{2}$ = asin$\frac{a}{2}$.

ΔPMN – прямоугольный, PN = 2a – b, MN = PN sin$\frac{a}{2}$ = (2a – b) sin$\frac{a}{2}$.

FM = FN – MN = a sin$\frac{a}{2}$ - (2a – b) sin$\frac{a}{2}$ = (a-2a+b) sin$\frac{a}{2}$= (b-a) sin$\frac{a}{2}$.

ΔPCD – равнобедренный, то PD = DC = a. ÐCDA = 180°- a; ÐLDA = $\frac{1}{2}$ÐD= 90°- $\frac{a}{2}$.

ΔPLD – прямоугольный, PL = PDsinÐLDA = asin(90°- $\frac{a}{2}$) = acos$\frac{a}{2}$.

ΔPMN: PM = PN sinÐMNP = (2a – b) sin(90°- $\frac{a}{2}$) = (2a – b) cos$\frac{a}{2}$.

ML = PL – PM = a cos$\frac{a}{2}$ - (2a – b) cos$\frac{a}{2}$ = (a-2a+b) cos$\frac{a}{2}$= = (b-a) cos$\frac{a}{2}$

S_{FKLM}=FM · ML=(b– a) sin$\frac{a}{2}$ (b – a) cos$\frac{a}{2}$ = (b – a) ^{2}sin$\frac{a}{2}$cos$\frac{a}{2}$ = $\frac{(b-a)^2\sin a}{2}$.

Ответ: $\frac{(b-a)^2\sin a}{2}$.

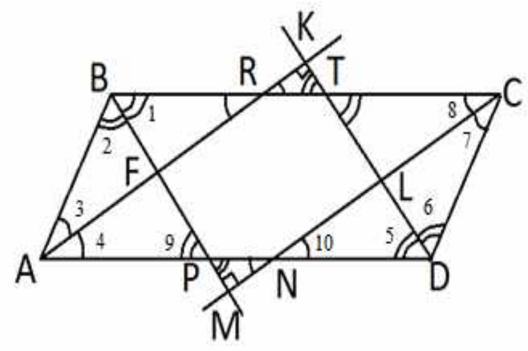

Рисунок 2.6

Пусть$a<b$, $a<\frac{b}{2}$ (рисунок 2.6). Đ1=Đ2=Đ5=Đ6=Đ9 и Đ3=Đ4=Đ7=Đ8=Đ10, Đ9=ĐNPM, Đ10=ĐMNP, как вертикальные.

Аналогично ĐBFA = ĐCLD= ĐAKD = ĐFML =90∘и FKLM – прямоугольник.

ΔAFP: ĐFAP = $\frac{a}{2}$, AP = a, FP = a sin$\frac{a}{2}$.

ΔPMN: ĐPNM = $\frac{a}{2}$, PN = b – 2a, PM = (b – 2a) sin$\frac{a}{2}$.

FM = FP + PM = a sin$\frac{a}{2}$ + (b – 2a) sin$\frac{a}{2}$ = (b – a) sin$\frac{a}{2}$.

ĐCDA = 180∘- a, ĐLDN = 90∘- $\frac{a}{2}$. В ΔNLD NL = a sin(90∘- $\frac{a}{2}$) = a cos$\frac{a}{2}$.

ΔNMP: NM = (b – 2a) sin(90∘- $\frac{a}{2}$) = (b – 2a) cos$\frac{a}{2}$.

ML = MN + NL = (b – 2a) cos$\frac{a}{2}$ + a cos$\frac{a}{2}$ = (b – a) cos$\frac{a}{2}$.

S_{FKLM}= ML · FM = (b – a) cos$\frac{a}{2}$ (b – a) sin$\frac{a}{2}$= $\frac{(b-a)^2 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2} = \frac{(b-a)^2\sin a}{2}$.

Ответ: $\frac{(b-a)^2\sin a}{2}$.

Таким образом получили, что при пересечении биссектрис углов параллелограмма получится прямоугольник с площадью$\frac{(b-a)^2\sin a}{2}$, где a, b - стороны параллелограмма, a – острый угол. Если исходная фигура прямоугольник, то получаем частный случай.

3 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА ОТРЕЗКАМИ, ЛЕЖАЩИМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

3.1 Пересечение квадрата отрезками, лежащими на параллельных прямых

Задача 1. Квадрат ABCD со стороной а пересечен отрезками MN и PQ, лежащими на параллельных прямых, находящимися на расстоянии а. Доказать, что отрезки MQ и NP пересекаются под углом 45°.

Так как полосой шириной а называется пара параллельных прямых на расстоянии а между ними, то можно сказать, что на полосу наложен квадрат. И задачу можно сформулировать по-другому: на полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, причём так, что его граница пересекла границу полосы в четырёх точках. Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются под углом 45° [5].

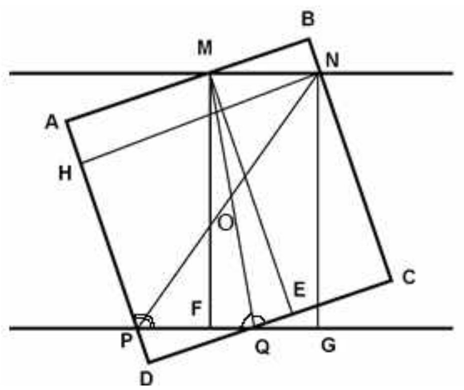

Рисунок 3.1

Решение:Пусть MQÇNP = O (рисунок 3.1).Проведем ME^DC, MF^PQ. ΔMQF = ΔMQE по катету и гипотенузе: ME=MF=a, MQ- общая гипотенуза. Из равенства треугольников следует, что ÐMQF=ÐMQE.

Проведем NH^AD, NG^PQ. ΔNPH = ΔNPG по катету и гипотенузе: NH=NG=a, NP-общая гипотенуза. Из равенства треугольников следует, что ÐNPH=ÐNPG.

ÐAPQ = 180°-ÐDPQ. ÐCQP = 180°-ÐDQP.

В прямоугольном треугольнике DPQÐDPQ+ÐDQP= 90°. Тогда ÐAPQ+ÐCQP=180°-ÐDPQ+180°-ÐDQP=360°-(ÐDPQ+ÐDQP)= 360°-90°=270°.ÐOPQ+ÐOQP=270°:2=135°.

В ΔPOQÐPOQ=180°-135°=45°, что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу, которая нам в дальнейшем понадобится.

Задача 2. Доказать, что при пересечении двух полос шириной а образуется ромб с высотой а.

Доказательство**:**Пусть две полосы шириной апересекаются в точках X, M, Y, Q (рисунок 3.2). XMYQ – параллелограмм, т.к. XM || QY, MY|| XQ.

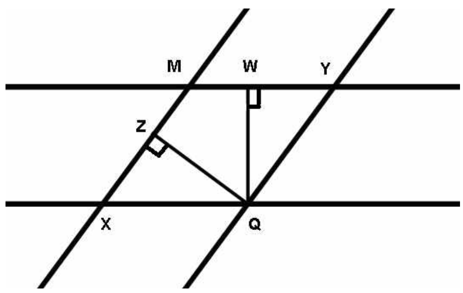

Рисунок 3.2

Проведем QZ^XM, QW^MY. ΔXZQ=ΔYWQ по катету и острому углу. ÐZXQ = ÐWYQ– противоположные углы параллелограмма, QZ=QW=a, так как полосы шириной а.

Из равенства треугольников следует, что QX=QY.Значит, XM=MY=YQ=QX, т.е. XMYQ – ромб с высотой а, что и требовалось доказать.

Задача 3. Доказать, что точки B, O, D лежат на одной прямой.

Доказательство:Продлим стороны AB и DC до пересечения с линиями полосы, получим ромб XMYQ (рисунок 3.3). MQ- биссектриса угла ромба, ÐAMN, каждая ее точка лежит на одинаковом расстоянии от прямых AM и MN.

NP- биссектриса ÐCNM, каждая ее точка лежит на одинаковом расстоянии от прямых CN и MN. Тогда точка O пересечения биссектрис находится на одинаковом расстоянии от всех трех прямых: AM, MN и CN.

Прямые AM и CN пересекаются в точке B. Значит, точка O лежит на одинаковом расстоянии от прямых AB и CB, а, следовательно, лежит на биссектрисе ÐABC.

Биссектриса ÐABC - это диагональ квадрата ABCD. Значит, O лежит на диагонали BD, т. е. точки B, T и D лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

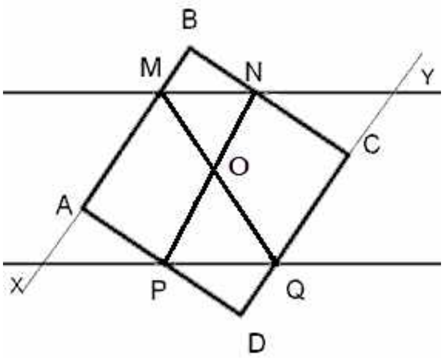

Рисунок 3.3

3.2 Пересечение ромба отрезками, лежащими на параллельных прямых

Заменим в задаче квадрат на ромб. Утверждение о том, что точки B, D и O лежат на одной прямой, остается в силе, а угол нужно найти.

Задача 4. На полосу положили ромб, высота которого равна ширине полосы, причём так, что его граница пересекла границу полосы в четырёх точках. Найти, под каким углом пересекаются две прямые, проходящие накрест через эти точки.

Решение:Пусть ÐABC – острый угол ромба. MNÇ AD = E, QPÇBC = F (рисунок 3.4). ENFP – ромб (по задаче 2). NP – его диагональ и, значит, биссектриса Ð MNC.

Если продлим стороны AB и CD до пересечения с прямыми PQ и MN, получим ромб MKQL, в котором диагональ MQ будет биссектрисой ÐAMN.

Пусть ÐBMN=a, ÐBNM=b. В ΔMBNa+b+ÐMBN =180°. Тогда a+b=180°-ÐMBN.

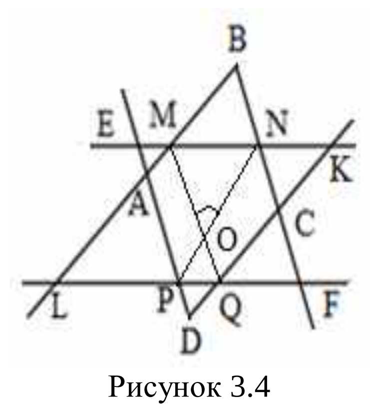

Рисунок 3.4

$\text{Ð}NMA = 180^{0} - a$, $\text{Ð}NMO = \dfrac{180^{0} - a}{2}$, т. к. MQ- биссектриса ÐAMN .

$\angle MNC = 180^0 - b$, $\angle MNO = \dfrac{180^0 - b}{2}$, т. к. NP- биссектриса $\angle MNC$.

Рассмотрим ΔMNO. $\angle$MON=180°-$\angle$NMO- $\angle$MNO=180° - $\dfrac{180^0 - a}{2}$ - $\dfrac{180^0 - b}{2}$ = $\dfrac{a+b}{2}$. Так как $a + b = 180^0 - \angle MBN$, то $\angle MON = \dfrac{180^0 - \angle MBN}{2}$.

Так как ABCD - ромб, то $\angle BAD + \angle CBA = 180^0$, отсюда $\angle CBA = 180^0 - \angle BAD$. $\angle MON = \dfrac{180^0 - (180^0 - \angle BAD)}{2} = \dfrac{\angle BAD}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\angle BAD}{2}$

Таким образом, если на полосу положили ромб, высота которого равна ширине полосы, причём так, что его граница пересекла границу полосы в четырёх точках, то две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются под углом равном половине тупого угла ромба. Если на полосу положен квадрат, то угол тоже равен половине угла: 45°.

3.3 Пересечение трех ромбов

Если посмотреть на предыдущую задачу внимательнее, можно обнаружить три ромба с равными высотами: ABCD, ENFP, MKQL (рисунок 3.5).

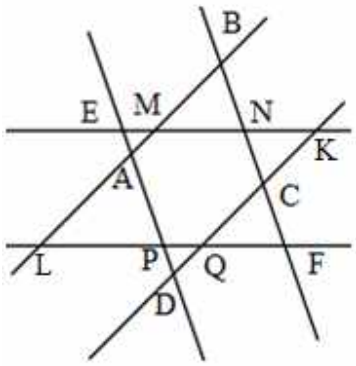

Рисунок 3.5

Задача 5. Три ромба с одинаковой высотой расположены так, как показано на рисунке 3.6. Доказать, что: а) отрезки EF, MQ и AC пересекаются в одной точке;б) отрезки BD, MQ и NP пересекаются в одной точке;в) отрезки KL, NP и CA пересекаются в одной точке; г) отрезки EF, BD и KL пересекаются в одной точке.

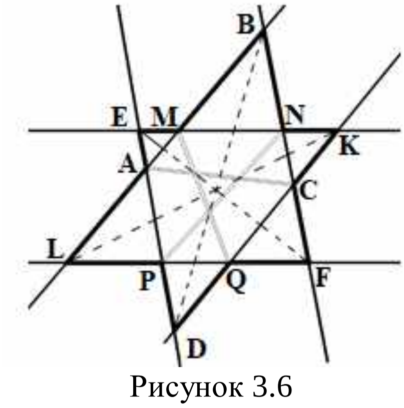

Рисунок 3.6

Доказательство:а) При пересечении двух полос шириной аобразуется ромб с высотой а. Значит, ENFP – ромб, который пересекает образованную прямыми полосу в точках A, M и Q, C соответственно (рисунок 3.7).

AC – биссектриса Ð PAM, MQ- биссектриса Ð AMN (по задаче 4), EF- диагональ ромба. MQ Ç AC=X. По задаче 3 точка пересечения X лежит на диагонали ромба EF. Значит, отрезки EF, MQ и AC пересекаются в одной точке X.

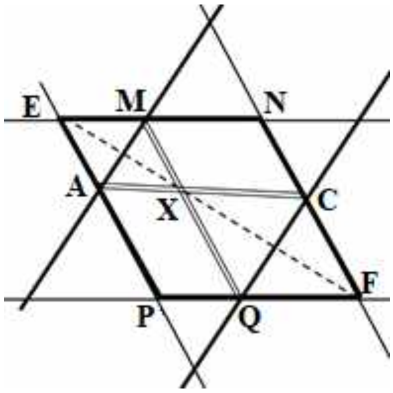

Рисунок 3.7

б) Для доказательства рассмотрим ромб ABCD, который пересекает полосу в точках M, N и P, Q (рисунок 3.8). PN – биссектриса Ð QPA, QM – биссектриса Ð CQP, BD - диагональ ромба. PN Ç QM=Z. По задаче 3 точка Z лежит на диагонали BD. Значит, отрезки BD, MQ и NP пересекаются в одной точке.

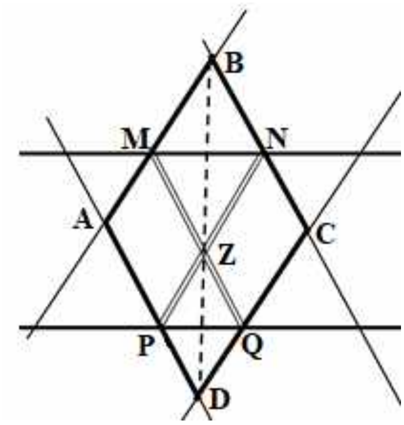

Рисунок 3.8

в) Аналогично рассмотрим ромб MKQL (рисунок 3.9). NP – биссектриса Ð MNC, CA - биссектриса Ð NCQ, KL – диагональ. NP Ç AC=Y. Y лежит на диагонали KL. Значит, отрезки KL, NP и CA пересекаются в одной точке

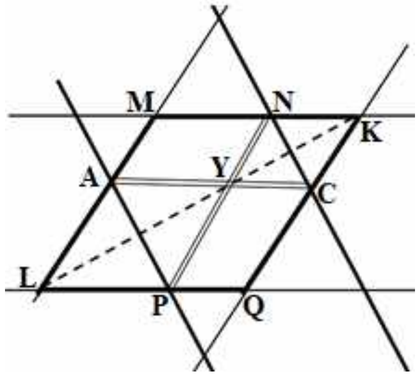

Рисунок 3.9

г) EFÇ KL=O (рисунок 3.10). Точка O лежит на диагонали EF ромба ENFP, значит, лежит на биссектрисе его углов и равноудалена от прямых EP, EN и FN, FP.

Точка O лежит на диагонали KL ромба MKQL, значит, лежит на биссектрисе его углов и равноудалена от прямых KM, KQ, LQ, LM.

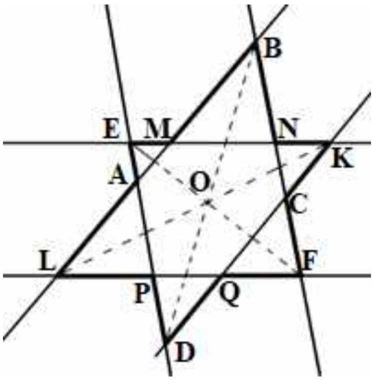

Рисунок 3.10

Значит, точка O находится на одинаковом расстоянии от прямых ED, EK, BF, LF, KD, LB. Следовательно, O равноудалена от ED и KD, а, значит от сторон ÐEDK, то есть лежит на биссектрисе этого угла. В ромбе ABCD диагональ BD является биссектрисой его углов, тогда точка O лежит на BD.

Следовательно, отрезки EF, BD и KL пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

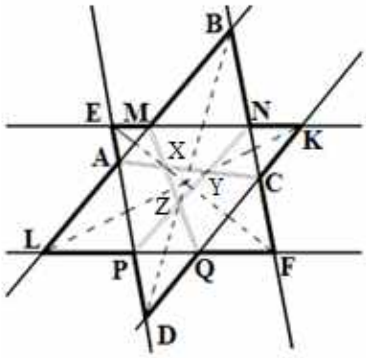

Рисунок 3.11

Посмотрим на рисунок 3.11. При наложении ромбов друг на друга, как показано на рисунке, образуется звездчатый шестиугольник AEMBNKCFQDPL, в котором отрезки, исходящие из его острых противоположных углов, пересекаются в одной точке O. Отрезки, исходящие из неострых противоположных углов попарно пересекаются, а точки пересечения образуют треугольник XZY, внутри которого находится точка O.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В своей работе я рассмотрел пересечение отрезков и разных видов четырехугольников, сделал обобщения.

Если каждая вершина параллелограмма соединена с серединой стороны, которая лежит между двумя следующими вершинами (считать вершины в одинаковом порядке), то отрезки своим пересечением образуют параллелограмм, площадь которого равна пятой части площади исходного параллелограмма. Если исходная фигура прямоугольник или квадрат, то получается частный случай. Для квадрата в пересечении получится тоже квадрат.

Для произвольного выпуклого четырёхугольника ABCD в этом случае получил: еслиE, F, K, L – середины сторон, то площадь четырехугольника, образованного прямыми EC, AK, BL, FD, равна сумме площадей четырех треугольников.

При пересечении биссектрис углов параллелограмма получится прямоугольник, площадь которого равна $\frac{(b-a)^2 \sin\alpha}{2}$, где a, b - стороны параллелограмма, α – острый угол. Если исходная фигура прямоугольник, то получится частный случай. Формула для вычисления площади будет верна, так как α=90°, sin90°=1.

Таким образом, для некоторых случаев гипотеза подтвердилась. Но были обнаружены и другие свойства.

Если ромб ABCD с высотой a пересечен отрезками MN и PQ, лежащими на параллельных прямых, находящимися на расстоянии a, то отрезки MQ и NP пересекаются под углом, равным половине тупого угла ромба (в случае квадрата будет угол 45°). Противоположные вершины ромба и точка пересечения отрезков лежат на одной прямой.

И, наконец, при наложении трех ромбов с одинаковой высотой выяснил некоторые свойства получившегося звездчатого шестиугольника. Отрезки, исходящие из его острых противоположных углов, пересекаются в одной точке. Отрезки же, исходящие из его противоположных неострых углов попарно пересекаются и образуют треугольник.

Работа может быть использована на уроках геометрии, на факультативах, при подготовке к олимпиадам, на внеклассных мероприятиях по математике.

Считаю, что цель выполнена. Решение задачи «в общем» виде часто может оказаться доступнее, легче, рациональнее, чем решение конкретной задачи. Так же обобщенная формулировка задачи позволяет обнаружить новый способ решения исходной задачи, а иногда и составить новую задачу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Наглядная геометрия, 8 класс: пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения/ В.В.Казаков. – 4-е изд. - Минск: Аверсэв, 2015. - 121 с.:ил.

2. Геометрия: учебное пособие для 8-го класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения/ В.В.Казаков. – Минск: Народная асвета, 2018..- 199 с.: ил.

3. https://ronl.org/stati/matematika/472610/

4. https://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-teorema-varinona-kak-alternativniy-sposob-resheniya-planimetricheskih-zadach-554923.html.

5. http://www.kvant.info/m68/savin1991-1992.htm