МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Средняя школа № 30 г. Гомеля»

О числе минимальных вершинных покрытий Цепочки

Листопадов Матвей Викторович,
учащийся 10 класса,
Пасмурцев Егор Сергеевич,
учащийся 10 класса,
Калугин Павел Дмитриевич,
учащийся 8 класса.

Довженок Татьяна Степановна,
учитель математики,
ГУО «СШ № 30 г. Гомеля»,
кандидат физико-математических наук.

Гомель, 2021

О ЧИСЛЕ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ ПОКРЫТИЙ ЦЕПОЧКИ

М.В. Листопадов, П.Д. Калугин, Е.С. Пасмурцев
ГУО «Средняя школа № 30 г. Гомеля», 10 «А», 8 «В» классы,
Гомель, Беларусь

Научный руководитель – Т.С. Довженок, учитель математики ГУО «СШ № 30 г. Гомеля», кандидат физико-математических наук.

Работа 1 с., 4 гл., 19 рис.

Ключевые слова: минимальное вершинное покрытие графа, Звено графа, граф Цепочка, граф Гусеница, Цепочка Петерсена.

В работе рассматривается новый класс графов – Цепочки.
Пусть H – подграф графа G, порождённый множеством вершин $X \in V(G)$, $A, B \in V(H)$, $A \neq B$, и существует автоморфизм графа H, переводящий A в B.
Упорядоченную тройку (H, A, B) будем называть **Звеном** графа G с концами A, B, если для любого ребра $MN \in E(G)$ такого, что M, N отличны от A, B, либо $M, N \in V(H)$, либо $M, N \notin V(H)$.

Граф G назовём **Цепочкой**, если его можно представить в виде $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, где 1) для любого $i \in \{1,2,\dots,n\}$ существует изоморфизм H на G_i, при котором вершины A, B переходят в вершины O_{i-1} и O_i соответственно; 2) (G_1, O_0, O_1), (G_2, O_1, O_2), …, (G_n, O_{n-1}, O_n) – Звенья графа G.

В работе установлена рекуррентная формула для нахождения числа минимальных вершинных покрытий Цепочки. Примечательно то, что коэффициенты в этой формуле зависят от шести параметров, которые названы нами **вершинными характеристиками** Звеньев. Впервые данный результат был озвучен нашим авторским коллективом на XXV республиканском конкурсе работ исследовательского характера учащихся, а настоящий проект является естественным продолжением по данной тематике.

Объектом нашего исследования являются **Граф Гусеница** и **Цепочка Петерсена**, Звеньями которых служат цикл с концами в смежных вершинах и Граф Петерсена с концами в несмежных вершинах соответственно.

Цель работы – определить число минимальных вершинных покрытий Графа Гусеницы и Цепочки Петерсена.

В результате исследования впервые были получены следующие результаты:

Теорема 2.1 *Число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Цепочки* $\boldsymbol{Ch(n,H,A,B)}$ *определяется следующим образом:*

1) если $\boldsymbol{b \neq 0}$, *то* $S_n = \frac{p+be-cd}{b} S_{n-1} + \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} S_{n-2} + \frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2} S_{n-3}$, $n \geq 3$,
$S_0 = 1, S_1 = a + 2b + c,\ S_2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + 2bd + 2ce + 2p$;

2) если $\boldsymbol{b = 0}$, *то*
$S_n = (a+c)S_{n-1} + c(f-a)S_{n-2} + c(d^2 - af)S_{n-3}, n \geq 3, S_0 = 1, S_1 = a + c,\ S_2 = a^2 + c^2 + 2cd,$
где $\boldsymbol{a, b, c, d, e, f}$ *– вершинные характеристики Звена* $(\boldsymbol{H, A, B})$, $p = ab + be + bc + cd$,
$q = b^2 d - abe + (b+d)(b^2 - ac), r = b^2 f - bde + (b+d)(be - cd)$.

Теорема 3.3 *Пусть* $\boldsymbol{n, m} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{m \geq 3}$. *Тогда число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Гусеницы* $\boldsymbol{CP(n,m)}$ *определяется рекуррентно*:

$$S_n = (X_{m-2} + X_{m-5})S_{n-1} + \left(X_{m-1}^2 + X_{m-3}X_{m-4} - X_{m-2}X_{m-5}\right)S_{n-2} + \left(X_{m-1}^2 X_{m-6}\right)S_{n-3}, n \geq 3,$$
$$S_0 = 1,\ S_1 = 2X_{m-1} + X_{m-4},\ S_2 = 2X_{m-1}^2 + X_{m-4}^2 + 2X_{m-4}X_{m-5} + 2X_{m-1}X_{m-2},$$
где $X_m = X_{m-2} + X_{m-3}, m \geq 3, X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1.$

Теорема 4.2
Пусть $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. *Тогда число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Цепочки Петерсена* $Ch(n, G(5,2))$ *определяется рекуррентно:* $S_n = 11S_{n-1} - 4S_{n-2} + 3S_{n-3},\ n \geq 3.\ S_0 = 1, S_1 = 15, S_2 = 165.$

Оглавление

Введение

На Республиканском Турнире Юных Математиков в 2018 году была предложена для исследования задача №13 Окрестностные множества в графах [1]. В частности, Автор поднял вопрос о нахождении числа минимальных окрестностных множеств Цепи, Цикла, графа Колесо. В свою очередь, в рамках подготовки к XXV республиканскому конкурсу работ исследовательского характера учащихся мы решили рассмотреть параллельное направление, связанное с нахождением **числа минимальных вершинных покрытий** графов более общего вида.

Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и множеством рёбер E. Множество вершин $D \subseteq V(G)$ будем называть **вершинным покрытием** графа G, если для каждого ребра $AB \in E(G)$ либо $A \in D$, либо $B \in D$.

Вершинное покрытие D графа G назовём **минимальным**, если при удалении из этого множества любой вершины оно перестаёт быть вершинным покрытием.

В работе «Вершинные покрытия графов» [2], представленной нами на конкурс, вводятся определения четырех классов графов: Ожерелья, Цветы, Графы Дали и Цепочки. Каждый из таких графов состоит из отдельных подграфов – Бусин и Звеньев, соединенных определенных образом. Для каждого из указанных классов графов в [2] были получены формулы для нахождения числа минимальных вершинных покрытий, при этом результат зависел от вершинных характеристик Бусин и Звеньев.

В настоящей работе мы продолжаем исследование представителей наиболее интересного из рассмотренных ранее классов графов – Цепочек. В [2] были получены формулы для нахождения числа минимальных вершинных покрытий Цепочек, Звеньями которых являются полные графы, полные двудольные графы и полные графы без одного ребра. В работе будут представлены и изучены два новых подвида Цепочек.

Объектом нашего исследования являются **Граф Гусеница** и **Цепочка Петерсена**, Звеньями которых служат цикл с концами в смежных вершинах и Граф Петерсена с концами в несмежных вершинах соответственно.

Цель работы – найти вершинные характеристики Звеньев, основой которых служат цикл с концами в смежных вершинах и Граф Петерсена с концами в несмежных вершинах, а также определить число минимальных вершинных покрытий Графа Гусеницы и Цепочки Петерсена.

Работа состоит из Введения, четырёх глав, Заключения и списка источников.
В Главе 1 приводятся определения Звена и трёх видов раскрасок, которые напрямую связаны с нахождением числа минимальных вершинных покрытий Цепочки.
В Главе 2 формулируется основной результат о Цепочках.
Главы 3-4 посвящены исследованию Графа Гусеницы и Цепочки Петерсена соответственно.

Глава 1. Звенья и раскраски

Определение 1.1
Раскраску вершин графа в белый и черный цвета будем называть **хорошей** (или будем говорить, что граф **окрашен хорошо**), если она удовлетворяет двум условиям:

1) *хотя бы один из концов любого ребра графа покрашен в чёрный цвет*;
2) *любая черная вершина смежна хотя бы с одной белой.*

Определение 1.2
Обозначим число хороших раскрасок графа G через $\mu(G)$.

Теорема 1.1
Число минимальных вершинных покрытий графа G равно $\mu(G)$.

Доказательство. Пусть граф G окрашен хорошо.
Заметим, что каждой хорошей раскраске соответствует минимальное вершинное покрытие графа G, которое состоит из всех чёрных вершин раскраски. Действительно, в силу свойства 1) хорошей раскраски, множество чёрных вершин является вершинным покрытием. С другой стороны, в силу условия 2), это покрытие минимально, поскольку при удалении любой чёрной вершины появляется ребро с двумя концами, не принадлежащими вершинному покрытию.
Верно и обратное: если покрасить вершины графа G в белый и чёрный цвета так, чтобы все вершины из рассматриваемого минимального вершинного покрытия были чёрными, а остальные – белыми, то полученная раскраска удовлетворяет 1)-2) и поэтому является хорошей. Таким образом, между множеством минимальных вершинных покрытий графа G и множеством всех его хороших раскрасок имеется взаимно однозначное соответствие.
Поэтому для нахождения числа минимальных вершинных покрытий графа G достаточно найти число всех его хороших раскрасок, которое и будет искомым. Теорема 1.2 доказана.

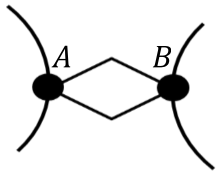
Определение 1.3
Пусть $O \in V(G)$. Раскраску вершин графа G в белый и чёрный цвета назовём ***О-почти хорошей***, если она удовлетворяет следующим трём условиям:

1) *хотя бы один из концов любого ребра окрашен в чёрный цвет;*
2) *вершина O окрашена в чёрный цвет и не смежна ни с одной белой вершиной;*
3) *любая чёрная вершина графа G, отличная от O, смежна хотя бы с одной белой вершиной.*

Определение 1.4
Пусть $A, B \in V(G)$. Раскраску вершин графа G в белый и чёрный цвета назовём ***AB-почти хорошей***, если выполнены 3 условия:

1) *хотя бы один из концов любого ребра окрашен в чёрный цвет;*
2) *вершины A, B окрашены в чёрный цвет и не смежны ни с одной белой вершиной;*
3) *любая чёрная вершина графа G, отличная от A и B, смежна хотя бы с одной белой вершиной.*

Определение 1.5
Пусть H – подграф графа G, порождённый множеством вершин $X \in V(G)$, $A, B \in V(H)$, $A \neq B$ при этом существует автоморфизм графа H, переводящий вершину A в вершину B.
Упорядоченную тройку (H, A, B) будем называть **Звеном** графа G с концами A, B, если выполняется следующее условие: для любого ребра $MN \in E(G)$ такого, что M, N отличны от A, B, либо $M, N \in V(H)$, либо $M, N \notin V(H)$.



Определение 1.6
Для Звена $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ определим следующие параметры:

$\boldsymbol{a}$ – число хороших раскрасок H, при которых вершины A и B – белые;
$\boldsymbol{b}$ – число хороших раскрасок H, при которых A – белая, B – черная;
$\boldsymbol{c}$ – число хороших раскрасок H, при которых вершины A и B – черные;
$\boldsymbol{d}$ – число A-почти хороших раскрасок H таких, что B – белая;
$\boldsymbol{e}$ – число A-почти хороших раскрасок H таких, что B – черная;
$\boldsymbol{f}$ – число AB-почти хороших раскрасок H.

Замечание.
Вершинные характеристики Звена с учетом симметрии вершин A и B численно характеризуют все возможные раскраски (H, A, B) при хорошей раскраске графа G.

Лемма 1.1 *Если для Звена* (H, A, B) *параметр* $b = 0$, *то имеют место следующие утверждения:*
1) вершины A *и* B *в графе* H *не смежны;*
2) $e = 0$;
3) $d \neq 0$.

Доказательство.
1) Предположим, что $AB \in E(H)$. Пусть Y – множество всех вершин графа H, смежных с вершиной A; H_1 – граф порожденный множеством вершин $V(H) \backslash (A \cup Y)$. Покрасим в черный цвет все вершины множества Y, в белый – вершину A, а граф H_1 покрасим хорошо. Легко видеть, что в этом случае граф H окрашен хорошо, при этом A – белая, B – черная. Значит $b \neq 0$. Противоречие. Следовательно, A и B в графе H не смежны.

2) Предположим, что $e \neq 0$. Тогда существует A-почти хорошая раскраска H такая, что вершина B – черная. Перекрасим вершину A в белый цвет. Получим хорошую раскраску H такую, что A и B окрашены в белый и чёрный цвета соответственно. Значит $b \neq 0$, что противоречит условию Леммы 1.1. Поэтому $e = 0$.

3) Согласно утверждению 1) Леммы 1.1 вершины A и B в графе H не смежны. Пусть Y, Z – множества всех вершин графа H, смежных с вершинами A и B соответственно, H_1 – граф, порожденный множеством вершин $V(H) \backslash (A \cup B \cup Y \cup Z)$. Покрасим в черный цвет все вершины множества $A \cup Y \cup Z$, в белый – вершину B, а граф H_1 покрасим хорошо. Легко видеть, что в этом случае граф H окрашен A-почти хорошо, при этом вершина B – белая. Значит $d \neq 0$. Лемма 1.1 доказана.

Глава 2. Цепочки. Основной результат

Пусть $n \in N$, H – граф без петель и кратных ребер. $A, B \in V(H)$, $A \neq B$, при этом существует автоморфизм графа H, переводящий вершину A в вершину B.

Определение 2.1
Граф G назовём **Цепочкой**, если его можно представить в виде $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, где
1) для любого $i \in \{1,2,\dots,n\}$ существует изоморфизм H на G_i, при котором вершины A, B переходят в вершины O_{i-1} и O_i соответственно;
2) (G_1, O_0, O_1), $(G_2, O_1, O_2), \dots, (G_n, O_{n-1}, O_n)$ – Звенья графа G.

Граф Цепочку будем обозначать $Ch(n, H, A, B)$ (*англ.* Chainlet).

Определение 2.2
Пусть a, b, c, d, e, f – вершинные характеристики Звена (H, A, B).
Определим величины $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ следующим образом:
$$\boldsymbol{p} = ab + be + bc + cd,\ \boldsymbol{q} = b^2 d - abe + (b+d)(b^2 - ac), \qquad (2.1)$$
$$\boldsymbol{r} = b^2 f - bde + (b+d)(be - cd).$$

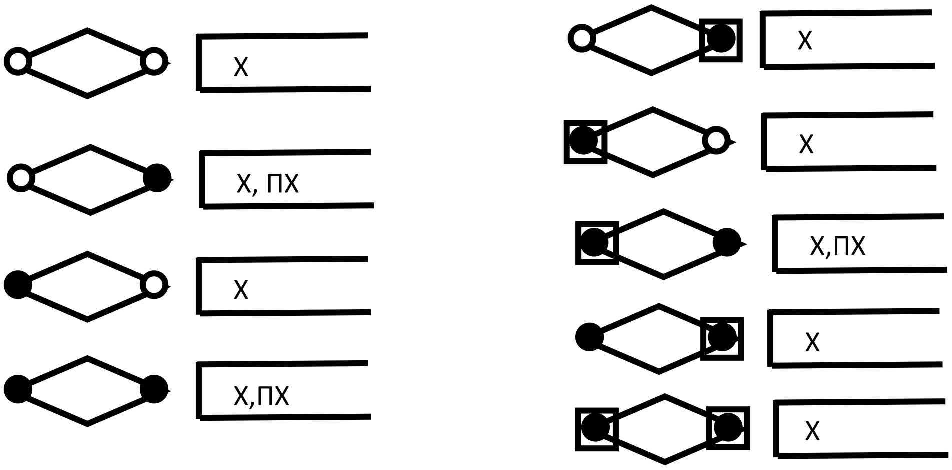
Теорема 2.1 (О числе минимальных вершинных покрытий Цепочки) *Число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Цепочки* $\boldsymbol{Ch(n, H, A, B)}$ *определяется следующим образом:*
1) если $\boldsymbol{b \neq 0}$, *то*
$$\boldsymbol{S_n = \frac{p+be-cd}{b} S_{n-1} + \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} S_{n-2} + \frac{b^2 r-acr+cqd-bqe}{b^2} S_{n-3},\ n \geq 3,} \qquad (2.2)$$
$$\boldsymbol{S_0 = 1, S_1 = a + 2b + c,\ S_2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + 2bd + 2ce + 2p};$$
2) если $\boldsymbol{b = 0}$, *то*
$$\boldsymbol{S_n = (a+c) S_{n-1} + c(f-a) S_{n-2} + c(d^2 - af) S_{n-3}, n \geq 3,} \qquad (2.3)$$
$$\boldsymbol{S_0 = 1, S_1 = a + c,\ S_2 = a^2 + c^2 + 2cd,}$$
где $\boldsymbol{a, b, c, d, e, f}$ *– вершинные характеристики Звена* $\boldsymbol{(H, A, B)}$, $\boldsymbol{p, q, r}$ *определяются из соотношений* (2.1).

Доказательство.
По Теореме 1.1 число минимальных вершинных покрытий Цепочки $Ch(n, H, A, B)$ равно $\mu(Ch(n, H, A, B))$. Пусть Цепочка покрашена хорошо или O_0-почти хорошо.

Обозначим: $\boldsymbol{X_n}$ и $\boldsymbol{Y_n}$ – количества хороших раскрасок Цепочки таких, что вершина O_0 – белая и черная соответственно; $\boldsymbol{Z_n}$ – число O_0-почти хороших раскрасок Цепочки; $\boldsymbol{S_n}$ – количество хороших раскрасок Цепочки.

Очевидно, что $X_1 = a + b, Y_1 = b + c, Z_1 = d + e, S_1 = a + 2b + c.$

Заметим, что каждое Звено, в зависимости от положения в Цепочке, может быть покрашено хорошо, A-почти хорошо или AB-почти хорошо.
В последних двух случаях проблема на конце (концах) Звена решается за счет хотя бы одного белого соседа в соседнем Звене. Ниже приведена таблица всех вариантов раскраски Звена и указан тип раскраски последующей Цепочки.



Исходя из указанных возможностей, получим следующую систему рекуррентных соотношений:

$$X_n = a\,X_{n-1} + b\,(Y_{n-1} + Z_{n-1}) + d\,Y_{n-1}\,, n \geq 2. \tag{2.4}$$
$$Y_n = b\,X_{n-1} + c\,(Y_{n-1} + Z_{n-1}) + e\,Y_{n-1}\,, n \geq 2. \tag{2.5}$$
$$Z_n = d\,X_{n-1} + e\,(Y_{n-1} + Z_{n-1}) + f\,Y_{n-1}\,, n \geq 2. \tag{2.6}$$
$$S_n = X_n + Y_n\,, n \geq 1. \tag{2.7}$$

Заметим, что если положить, $X_0 = 1, Y_0 = 0, Z_0 = 1, S_0 = 1$, то равенства (2.4), (2.5), (2.6) будут верны и при $n = 1$, а (2.7) будет верно при $n = 0$. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться этим уточнением. Кроме того из системы получим:

$$X_2 = a(a + b) + b(b + c + d + e) + d(b + c)\,,$$
$$Y_2 = b(a + b) + c(b + c + d + e) + e(b + c),$$
$$S_2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + 2bd + 2ce + 2p.$$

Пусть $n \in N$. Из (2.4) выразим

$$b\,Z_{n-1} = X_n - a\,X_{n-1} - (b + d)Y_{n-1}\,. \tag{2.8}$$

Далее (2.5) и (2.6) умножаем на b и учитываем (2.8):

$$b\,Y_n = b^2X_{n-1} + (bc + be)Y_{n-1} + cX_n - acX_{n-1} - (bc + cd)Y_{n-1},$$
$$X_{n+1} - aX_n - (b + d)Y_n = bdX_{n-1} + (be + bf)Y_{n-1} + eX_n - aeX_{n-1} - (be + de)Y_{n-1}.$$

Последние 2 равенства после преобразования примут вид:

$$b\,Y_n = c\,X_n + (b^2 - ac)X_{n-1} + (be - cd)Y_{n-1}; \tag{2.9}$$
$$X_{n+1} = (a + e)X_n + (bd - ae)X_{n-1} + (b + d)Y_n + (bf - de)Y_{n-1}. \tag{2.10}$$

Умножая (2.10) на b и, учитывая (2.9), получим:

$$b\,X_{n+1} = (ab+be)X_n + (b^2d - abe)X_{n-1} + (b+d)cX_n +$$
$$+(b+d)(b^2-ac)X_{n-1} + (b+d)(be-cd)Y_{n-1} + (b^2f - bde)Y_{n-1},$$

откуда

$$b\,X_{n+1} = (ab+be+bc+cd)X_n + \big(b^2d - abe + (b+d)(b^2-ac)\big)X_{n-1} +$$
$$+(b^2f - bde + (b+d)(be-cd))Y_{n-1}. \qquad (2.11)$$

С учетом (2.1) равенство (2.11) перепишется так:

$$b\,X_{n+1} = p\,X_n + q\,X_{n-1} + r\,Y_{n-1}, \text{ откуда}$$
$$r\,Y_{n-1} = b\,X_{n+1} - p\,X_n - q\,X_{n-1}\,,\ n \in N. \qquad (2.12)$$

Случай $b \neq 0, r \neq 0$.

Умножим (6.9) на r и учтём (6.12):

$$b^2X_{n+2} - bpX_{n+1} - bqX_n = rcX_n + r(b^2-ac)X_{n-1} +$$
$$+(be-cd)(bX_{n+1} - pX_n - qX_{n-1})\,,$$

откуда

$$b^2X_{n+2} = (bp + b^2e - bcd)X_{n+1} + (bq + rc + pcd - pbe)X_n + \qquad (2.13)$$
$$+(b^2r - acr + cqd - bqe)X_{n-1}\,,\ n \in N.$$

Далее умножим (2.7) на r и используем равенство (2.12):

$$r\,S_n = r\,X_n + b\,X_{n+2} - pX_{n+1} - qX_n\,,\ n \in Z^+. \qquad (2.14)$$

Подставим $n-1$ и $n-2$ вместо n в равенство (2.14):

$$r\,S_{n-1} = r\,X_{n-1} + b\,X_{n+1} - pX_n - qX_{n-1}\,,\ n \in N; \qquad (2.15)$$
$$r\,S_{n-2} = r\,X_{n-2} + b\,X_n - pX_{n-1} - qX_{n-2}\,,\ n \geq 2. \qquad (2.16)$$

Умножаем (2.14) на $(bp + b^2e - bcd)$, (6.15) – на $(bq + rc + pcd - pbe)$, (2.16) – на $(b^2r - acr + cqd - bqe)$, складываем и учитываем (2.13):

$$r(bp + b^2e - bcd)S_n + r(bq + rc + pcd - pbe)S_{n-1} +$$
$$+r(b^2r - acr + cqd - bye)S_{n-2} = rb^2X_{n+1} + b^3X_{n+3} - pb^2X_{n+2} - qb^2X_{n+1}.$$

С учетом (2.14) последнее равенство примет вид:

$$r(bp + b^2e - bcd)S_n + r(bq + rc + pcd - pbe)S_{n-1} + \qquad (2.17)$$
$$+r(b^2r - acr + cqd - bye)S_{n-2} = b^2rS_{n+1}\,,\ n \geq 2.$$

Поскольку $r \neq 0$ и $b \neq 0$, то из (2.17) и указанных ранее S_0, S_1, S_2 получим:

$$S_n = \frac{p+be-cd}{b}S_{n-1} + \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2}S_{n-2} + \frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2}S_{n-3}\,,\ n \geq 3, \qquad (2.18)$$
$$S_0 = 1,\ S_1 = a + 2b + c,\ S_2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + 2bd + 2ce + 2p.$$

Случай $b \neq 0, r = 0$.

Пусть $n \in N$. Из (2.9) имеем:

$$bY_n + (cd - be)Y_{n-1} = cX_n + (b^2 - ac)X_{n-1}. \qquad (2.19)$$

Подставим $n-1$ вместо n в равенство (2.7):

$$S_{n-1} = X_{n-1} + Y_{n-1}. \qquad (2.20)$$

Умножим (2.7) и (2.20) на b и $(cd - be)$соответственно, а затем сложим:

$$bS_n + (cd - be)S_{n-1} = bX_n + (cd - be)X_{n-1} + bY_n + (cd - be)Y_{n-1}.$$

С учетом (2.19) последнее равенство перепишется так:

$$bS_n + (cd - be)S_{n-1} = (b+c)X_n + (cd - be + b^2 - ac)X_{n-1}. \qquad (2.21)$$

При $r = 0$ равенство (2.15) примет вид:

$$bX_{n+1} = pX_n + qX_{n-1}, n \in N. \tag{2.22}$$

Подставим $n-1$ вместо n в (2.21):

$$bS_{n-1} + (cd-be)S_{n-2} = (b+c)X_{n-1} + (cd-be+b^2-ac)X_{n-2}, n \geq 2. \tag{2.23}$$

Умножим (2.21), (2.23) на p, q соответственно, сложим и используем (2.22):

$$bpS_n + p(cd-be)S_{n-1} + bqS_{n-1} + q(cd-be)S_{n-2} = \tag{2.24}$$
$$= (b+c)bX_{n+1} + (cd-be+b^2-ac)bX_n, n \geq 2.$$

Из (2.24) с учетом (2.21) находим:

$$S_n = \frac{p+be-cd}{b}S_{n-1} + \frac{p(cd-be)+bq}{b^2}S_{n-2} + \frac{(cd-be)q}{b^2}S_{n-3}, n \geq 3. \tag{2.25}$$

Заметим, что формула (2.25) может быть получена из (2.18) при $r = 0$.
Формула (2.2) доказана.

Случай $\boldsymbol{b = 0}$.
Тогда $e = 0$, $d \neq 0$ (Лемма 1.1). Пусть $n \in N$. Из (2.4) имеем:

$$dY_{n-1} = X_n - aX_{n-1}. \tag{2.26}$$

Умножая (2.6) на d и учитывая (2.26), получим:

$$dZ_n = d^2X_{n-1} + fX_n - afX_{n-1}. \tag{2.27}$$

Умножим (2.5) на d и учтем (2.26), (2.27):

$$X_{n+1} - aX_n = cX_n - acX_{n-1} + cd^2X_{n-2} + cfX_{n-1} - acfX_{n-2}, n \geq 2,$$

откуда

$$X_{n+1} = (a+c)X_n + (cf-ac)X_{n-1} + (cd^2-acf)X_{n-2}\ , n \geq 2. \tag{2.28}$$

Умножим (2.7) на d и применим (2.26):

$$dS_n = (d-a)X_n + X_{n+1}\ ,\ n \in Z^+. \tag{2.29}$$

Подставим $n-1$ и $n-2$ вместо n в (2.29):

$$dS_{n-1} = (d-a)X_{n-1} + X_n, n \in N; \tag{2.30}$$
$$dS_{n-2} = (d-a)X_{n-2} + X_{n-1}\ , n \geq 2. \tag{2.31}$$

Умножим (2.29) , (2.30), (2.31) на $(a+c)$, $(cf-ac)$, (cd^2-acf) соответственно, сложим и учтём (2.28):

$$d\big((a+c)S_n + (cf-ac)S_{n-1} + (cd^2-acf)S_{n-2}\big) = (d-a)X_{n+1} + X_{n+2},\ n \geq 2.$$

Последнее равенство с учетом (2.29), $d \neq 0$ и указанных ранее S_0, S_1, S_2 преобразуем к виду:

$$S_n = (a+c)S_{n-1} + c(f-a)S_{n-2} + c(d^2-af)S_{n-3}, n \geq 3,$$
$$S_0 = 1,\ S_1 = a+c, S_2 = a^2+c^2+2cd.$$

Формула (2.3) доказана, что и завершает доказательство Теоремы 2.1.

Глава 3.Граф Гусеница

Определение 3.1
Пусть $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{P_m}$ – простая цепь с последовательными вершинами $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{m}$.
Обозначим через $\boldsymbol{X_m}$ число хороших раскрасок цепи $\boldsymbol{P_m}$ при условии, что вершина **1** – белая.

Теорема 3.1

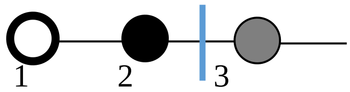
Пусть $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\boldsymbol{X_m}$ *определяется рекуррентно по формуле:*

$$\boldsymbol{X_m = X_{m-2} + X_{m-3}, m \geq 3, X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1.} \tag{3.1}$$

Доказательство.

Обозначим через Y_m количество хороших раскрасок цепи P_m при условии, что вершина 1 – чёрная.

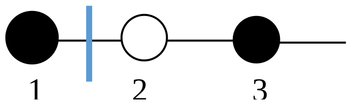
Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим хорошие раскраски P_m, когда вершина 1 – белая.



Вершина 2 обязана быть черной. Заметим, что цепь P_{m-2} с вершинами $3,4, \dots, m$ окрашена как угодно хорошо. Таких раскрасок ровно $X_{m-2} + Y_{m-2}$. Значит

$$X_m = X_{m-2} + Y_{m-2}, \ m \geq 3. \tag{3.2}$$

Пусть $m \geq 2$. Рассмотрим хорошие раскраски P_m, когда вершина 1 – чёрная.



Тогда вершина 2 – белая и цепь P_{m-1} с вершинами $2,3, \dots, m$ окрашена как угодно хорошо при условии, что вершина 2 – белая. Таких раскрасок X_{m-1}. Значит

$$Y_m = X_{m-1}, m \geq 2. \tag{3.3}$$

На основании (3.3) получим $Y_{m-2} = X_{m-3}, m \geq 4$. Тогда (3.2) перепишется так:

$$X_m = X_{m-2} + X_{m-3}, m \geq 4. \tag{3.4}$$

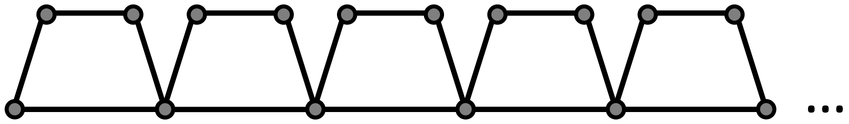
Простым перебором находим $X_1 = X_2 = X_3 = 1$. Заметим, что если в формуле (3.4) положить $X_0 = 0$, то она будет верна и для $m = 3$.

Тем самым доказано, что X_m удовлетворяет (3.1).

Определение 3.2

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$.

Цепочку $Ch(n, C_m, A, B)$, где A, B – смежные вершины цикла C_m, назовём **Гусеницей** и будем обозначать $\boldsymbol{CP(n, m)}$ (*англ.* Caterpillar – гусеница).



<u>Граф Гусеница</u> $CP(n, 4)$

Теорема 3.2

Пусть $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{m \geq 3}$, $\boldsymbol{A, B \in V(C_m)}$, $\boldsymbol{AB \in E(C_m)}$, $\boldsymbol{(a, b, c, d, e, f)}$ *– вершинные характеристики Звена* $\boldsymbol{(C_m, A, B)}$. *Тогда* $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{b = X_{m-1}}$,

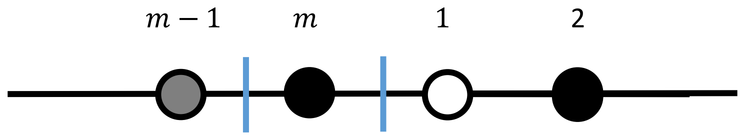
$$\boldsymbol{c = \begin{cases} 1, m = 3, \\ X_{m-4}, m \geq 4 \end{cases}, d = 0, e = \begin{cases} 0, m = 3, \\ 1, m = 4, \\ e = X_{m-5}, m \geq 5 \end{cases}, f = \begin{cases} 0, m \in \{3; 4\}, \\ 1, m = 5, \\ X_{m-6}, m \geq 6 \end{cases},}$$

где $\boldsymbol{X_i}$ *удовлетворяет* (3.1).

Доказательство.

Занумеруем последовательные вершины цикла C_m числами от 1 до m таким образом, чтобы вершинам A и B соответствовали вершины 1 и 2.

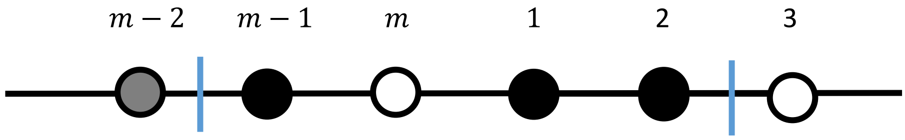
Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим хорошие раскраски C_m при условии, что вершина 1 – белая. Тогда вершина 2 – чёрная, откуда $a = 0$.



Кроме того, вершина m – чёрная, а цепь P_{m-1} с вершинами $1,2,\dots,m-1$ окрашена как угодно хорошо с единственным условием: вершина 1 – белая. Таких раскрасок ровно X_{m-1}. Следовательно,

$$b = X_{m-1}, m \geq 3.$$

Пусть $m \geq 5$. Рассмотрим хорошие раскраски C_m при условии, что вершины 1 и 2 – чёрные.

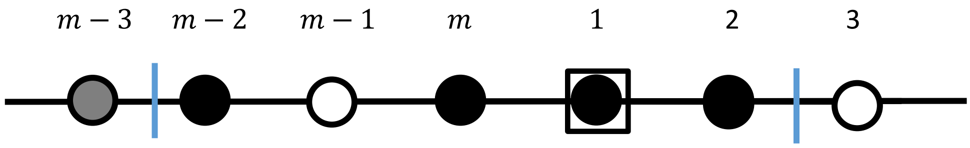


Тогда вершины 3 и m – белые, а вершина $(m-1)$ – черная. Заметим, что цепь P_{m-4} с вершинами $3,4,\dots,m-2$ окрашена как угодно хорошо с единственным условием: вершина 3 – белая. Таких раскрасок ровно X_{m-4}. Следовательно,

$$c = X_{m-4}, m \geq 5.$$

Очевидно, что $c = \begin{cases} 1, m = 3, \\ 0, m = 4. \end{cases}$

Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим A-почти хорошие раскраски C_m. Заметим, что при этом вершина 2 является чёрной. Значит, $d = 0$. Пусть теперь $m \geq 6$.

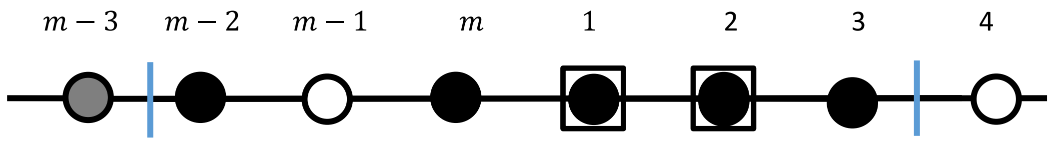


Тогда вершина m – чёрная, а вершины 3 и $(m-1)$ – белые. Следовательно, вершина $(m-2)$ – чёрная и цепь P_{m-5} с вершинами $3,4,\dots,m-3$ окрашена как угодно хорошо с единственным условием: вершина 3 – белая.
Таких раскрасок ровно X_{m-5}. Следовательно,

$$e = X_{m-5}, m \geq 6.$$

Очевидно, что $e = \begin{cases} 0, m = 3, \\ 1, m = 4, \\ 0, m = 5. \end{cases}$

Пусть $m \geq 7$. Рассмотрим AB-почти хорошие раскраски C_m.



Тогда вершины 3 и m – чёрные, а вершины 4 и $(m-1)$ – белые. Следовательно, вершина $(m-2)$ – чёрная и цепь P_{m-6} с вершинами $4,5,\dots,m-3$ окрашена как угодно хорошо с единственным условием: вершина 4 – белая. Таких раскрасок ровно X_{m-6}. Следовательно,

$$f = X_{m-6}, m \geq 7.$$

Очевидно, что $f = \begin{cases} 0, m \in \{3;4\}, \\ 1, m = 5, \\ 0, m = 6. \end{cases}$

Теорема 3.2 доказана.

Теорема 3.3
Пусть $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{3}$. *Тогда число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Гусеницы* $\boldsymbol{CP}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m})$ *определяется рекуррентно*:

$$\boldsymbol{S_n = (X_{m-2} + X_{m-5})S_{n-1} + \left(X_{m-1}^2 + X_{m-3}X_{m-4} - X_{m-2}X_{m-5}\right)S_{n-2} +}$$
$$\boldsymbol{+X_{m-1}^2 X_{m-6} \cdot S_{n-3}, n \geq 3,}$$
$$\boldsymbol{S_0 = 1,\ S_1 = 2X_{m-1} + X_{m-4},\ S_2 = 2X_{m-1}^2 + X_{m-4}^2 + 2X_{m-4}X_{m-5} + 2X_{m-1}X_{m-2}.}$$

Доказательство.
Для Звена (C_m, A, B), где $AB \in E(C_m.)$, по Теореме 3.2 находим вершинные характеристики:

$$a = 0, b = X_{m-1}, c = \begin{cases} 1, m = 3, \\ X_{m-4}, m \geq 4 \end{cases}, d = 0, e = \begin{cases} 0, m = 3, \\ 1, m = 4, \\ X_{m-5}, m \geq 5 \end{cases}, f = \begin{cases} 0, m \in \{3;4\}, \\ 1, m = 5, \\ X_{m-6}, m \geq 6 \end{cases},$$

Рассмотрим 4 случая.

Случай 1. $\boldsymbol{m = 3}$**.**
Используя (2.1), определяем p, q, r:

$$p = ab + be + bc + cd = 1, \quad q = b^2d - abe + (b+d)(b^2 - ac) = 1,$$
$$r = b^2f - bde + (b+d)(be - cd) = 0.$$

Тогда

$$\frac{p+be-cd}{b} = 1, \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} = 1, \frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2} = 0.$$

По Теореме 2.1 при $b \neq 0$ получаем:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, n \geq 3, S_0 = 1, S_1 = 3, S_2 = 5.$$

Случай 2. $\boldsymbol{m = 4}$**.**
Используя (2.1), определяем p, q, r:

$$p = ab + be + bc + cd = 1, \quad q = b^2d - abe + (b+d)(b^2 - ac) = 1,$$
$$r = b^2f - bde + (b+d)(be - cd) = 1.$$

Тогда

$$\frac{p+be-cd}{b} = 2, \ \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} = 0, \ \frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2} = 0$$

По Теореме 2.1 при $b \neq 0$ получаем:

$S_n = 2S_{n-1}, n \geq 4, S_0 = 1, S_1 = 2, S_2 = 4$, откуда $S_n = 2^n$.

Случай 3. $\boldsymbol{m = 5}$**.**

Используя (2.1), определяем p, q, r:

$$p = ab + be + bc + cd = 2, \ q = b^2d - abe + (b+d)(b^2 - ac) = 8,$$
$$r = b^2f - bde + (b+d)(be - cd) = 4.$$

Тогда

$$\frac{p+be-cd}{b} = 1, \ \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} = 5, \ \frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2} = 4.$$

По Теореме 2.1 при $b \neq 0$ получаем:

$$S_n = S_{n-1} + 5S_{n-2} + 4S_{n-3}, ,n \geq 5\ S_0 = 1, S_1 = 5, S_2 = 13.$$

Случай 4. $\boldsymbol{m \geq 6}$.
Используя (2.1) и (3.1), определяем p, q, r:

$$p = ab + be + bc + cd = X_{m-1}X_{m-5} + X_{m-1}X_{m-4} = X_{m-1}X_{m-2},$$

$$q = b^2d - abe + (b+d)(b^2 - ac) = X_{m-1}X_{m-1}^2 = X_{m-1}^3,$$

$$r = b^2f - bde + (b+d)(be - cd) = X_{m-1}^2X_{m-6} + X_{m-1}^2X_{m-5} = X_{m-1}^2X_{m-3}.$$

Тогда

$$\frac{p+be-cd}{b} = \frac{X_{m-1}X_{m-2}+X_{m-1}X_{m-5}}{X_{m-1}} = X_{m-2} + X_{m-5},$$

$$\frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} = \frac{X_{m-1}^4+X_{m-1}^2X_{m-4}X_{m-3}-X_{m-1}^2X_{m-2}X_{m-5}}{X_{m-1}^2} = X_{m-1}^2 + X_{m-3}X_{m-4} - X_{m-2}X_{m-5},$$

$$\frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2} = \frac{X_{m-1}^4X_{m-3}-X_{m-1}^4X_{m-5}}{X_{m-1}^2} = X_{m-1}^2X_{m-6}.$$

По Теореме 2.1 при $b \neq 0$ получаем:

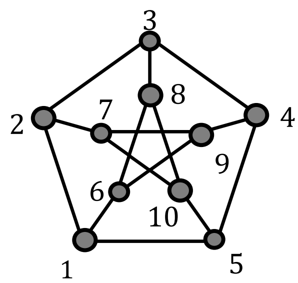
$$S_n = (X_{m-2} + X_{m-5})S_{n-1} + (X_{m-1}^2 + X_{m-3}X_{m-4} - X_{m-2}X_{m-5})S_{n-2} + X_{m-1}^2X_{m-6}S_{n-3},\ n \geq 3,$$

$$S_0 = 1,\ S_1 = 2X_{m-1} + X_{m-4},\ S_2 = 2X_{m-1}^2 + X_{m-4}^2 + 2X_{m-4}X_{m-5} + 2X_{m-1}X_{m-2}.$$

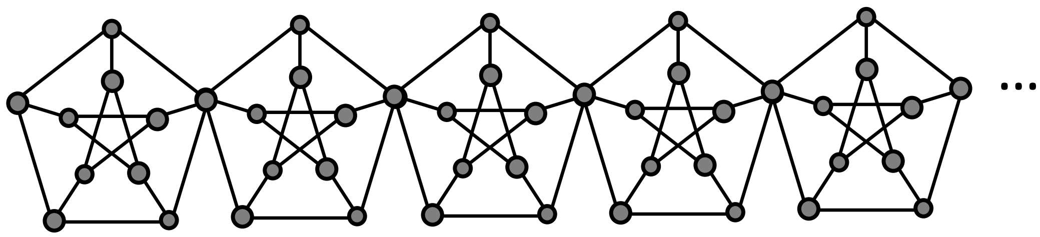
Теорема 3.2 доказана.

Глава 4. Цепочки Петерсена

Рассмотрим граф Петерсена $G(5,2)$[3]. Занумеруем его вершины числами от 1 до 10, как показано на рисунке. Пусть A и B – 2 несмежные вершины $G(5,2)$. Легко видеть, что существует автоморфизм, переводящий вершины A и B в вершины 2 и 4 соответственно. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что вершины A и B соответствуют вершинам 2 и 4.



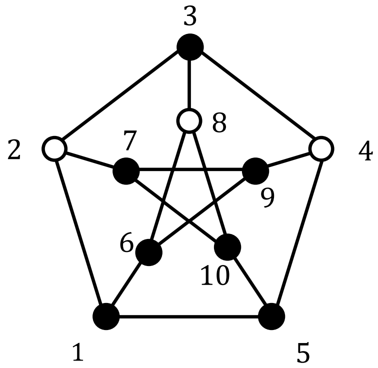
Определение 4.1
Пусть $G(5,2)$ – граф Петерсена.
Цепочку $Ch(n, G(5,2), A, B)$, где A, B – несмежные вершины $G(5,2)$, назовём **Цепочкой Петерсена** и будем обозначать $Ch(n, G(5,2))$.

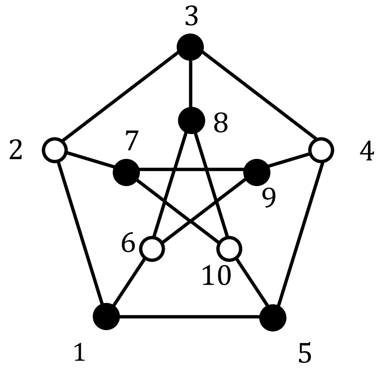


Цепочка Петерсена

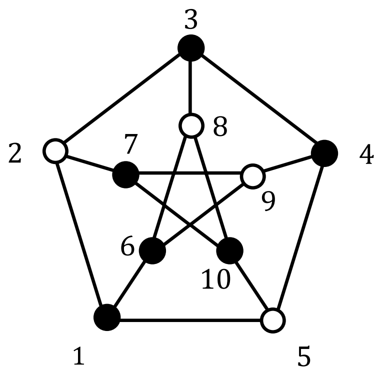
Теорема 4.1
Пусть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ *– вершинные характеристики Звена* $(\boldsymbol{G}(\mathbf{5}, \mathbf{2}), \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, *при этом* $\boldsymbol{AB} \notin \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}(\mathbf{5}, \mathbf{2}))$. *Тогда* $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}, \boldsymbol{b} = \mathbf{3}, \boldsymbol{c} = \mathbf{7}, \boldsymbol{d} = \mathbf{1}, \boldsymbol{e} = \mathbf{1}, \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$.

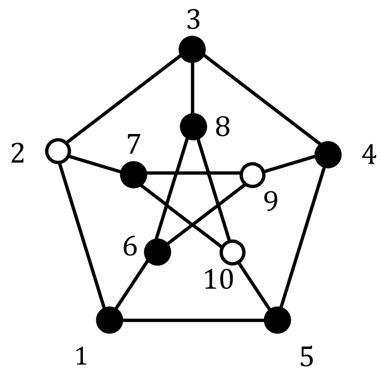
Доказательство.
Найдём a. Пусть $G(5,2)$ окрашен хорошо, при этом вершины 2 и 4 – белые. Тогда вершины 1, 3, 5, 7, 9 – чёрные.
Далее возможны 2 варианта: вершина 8 – белая и вершина 8 – чёрная.
В первом случае вершины 6 и 10 – чёрные, а во втором – белые, поскольку смежны только с чёрными вершинами. Следовательно, $a = 2$.

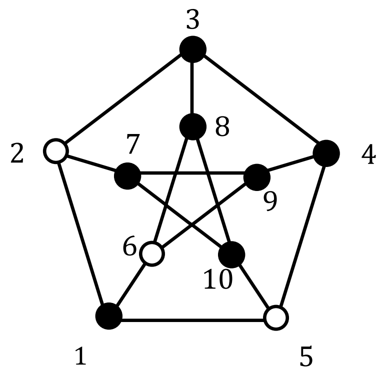




Найдём b. Пусть $G(5,2)$ окрашен хорошо, при этом вершины 2 и 4 – белая и чёрная соответственно. Тогда вершины 1, 3, 7 – чёрные. Далее возможны 2 варианта: вершина 8 – белая и вершина 8 – чёрная. В первом случае вершины 6 и 10 – чёрные. Тогда вершины 5 и 9 – белые, поскольку смежны только с чёрными вершинами. Во втором случае, если 5 – чёрная, то вершины 9 и 10 – белые (иначе 4 или 5 смежны только с чёрными вершинами), а 6 – чёрная. Если же 5 – белая, то 10 – чёрная. Тогда 6 – белая (иначе 8 смежна только с чёрными вершинами). Из последнего заключаем, что 9 – чёрная. Следовательно, $b = 3$.

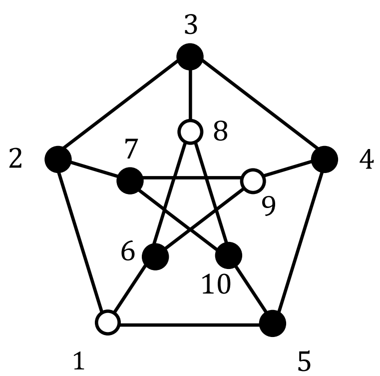


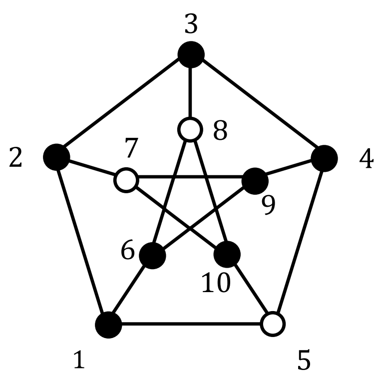




Найдём c. Пусть $G(5,2)$ окрашен хорошо, при этом вершины 2 и 4 – чёрные.
Рассмотрим два варианта для вершины 3.

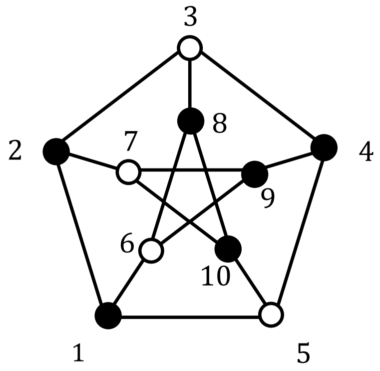
1) Вершина 3 – чёрная. Тогда вершина 8 – белая (иначе 3 смежна только с чёрными), а 6 и 10 – чёрные. Далее, если 5 – чёрная, то 9 – белая (иначе 4 смежна только с черными), а 7 – чёрная. Тогда, 1 – белая (иначе 2 смежна только с черными). Если же вершина 5 – белая, то 1 – чёрная. Тогда 7 – белая (иначе 2 смежна только с черными), а 9 – чёрная.

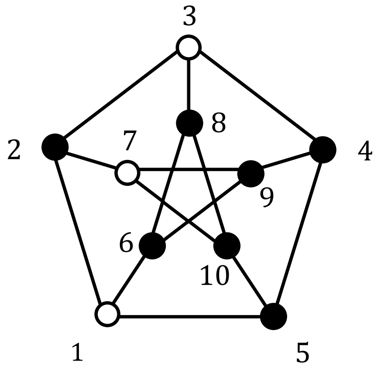




2) Вершина 3 –белая. Тогда вершина 8 – чёрная. Для вершины 7 есть две возможности.

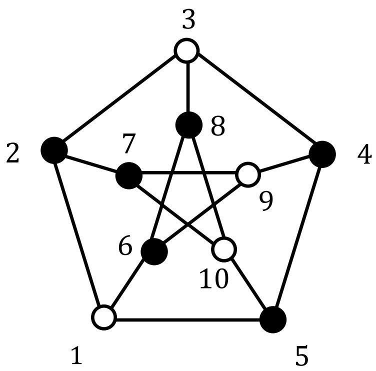
а) 7 – белая. Тогда 9 и 10 – чёрные. Далее, если 6 –белая, то 1 – чёрная, а 5 –белая (иначе 5 смежна только с черными). Если же вершина 6 – чёрная, то 1 –белая (иначе 6 смежна только с черными). Тогда 5 – чёрная.

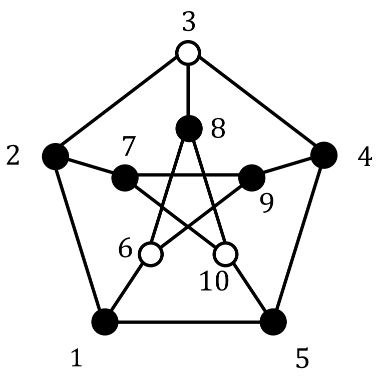


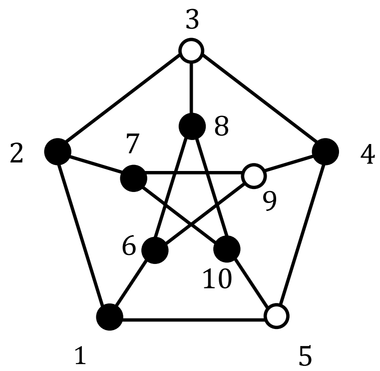


б) 7 – чёрная. Рассмотрим два варианта для вершины 1.

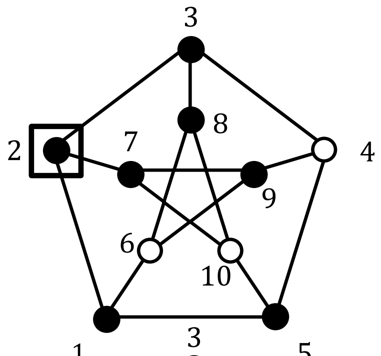
б1) 1 – белая. Тогда 5 и 6 – чёрные, а 9 и 10 – белые (поскольку 9 и 10 смежны только с черными).
б2) 1 – чёрная. Далее, если 5 – чёрная, то 6 и 10 – белые (иначе 1 или 5 смежны только с черными), а 9 – чёрная. Если же вершина 5 – белая, то 10 –чёрная, а 9 – белая (иначе 7 смежна только с черными). Тогда 6 – чёрная.



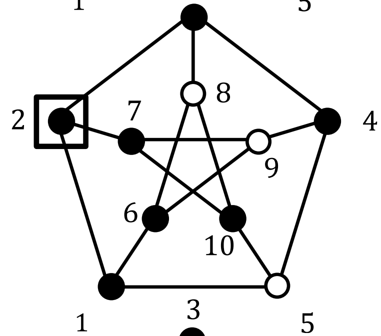




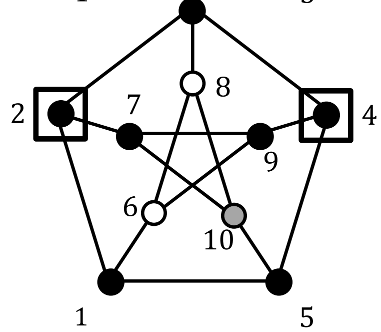
Окончательно получим $c = 7$.



Найдём d.
Пусть $G(5,2)$ окрашен A-почти хорошо, при этом вершина 4 – белая. Тогда вершины 1, 3, 5, 7, 9 – чёрные, а вершина 6 – белая (иначе 1 смежна только с чёрными). Тогда 8 – чёрная, а 10 – белая (иначе 10 смежна только с чёрными вершинами).
Следовательно, $d = 1$.



Найдём e.
Пусть $G(5,2)$ окрашен A-почти хорошо, при этом вершина 4 – чёрная. Тогда вершины 1, 3, 7 – чёрные, а вершина 8 – белая (иначе 3 смежна только с чёрными). Тогда 6 и 10 – чёрные, а 5 и 9 – белые (иначе 5 или 9 смежны только с чёрными вершинами).
Следовательно, $e = 1$.



Найдём f.
Пусть $G(5,2)$ окрашен AB-почти хорошо. Тогда вершины 1, 3, 5, 7, 9 – чёрные, а смежные вершины 6 и 8 – белые (иначе 1 или 3 смежны только с чёрными). Получили противоречие.
Следовательно, $f = 0$.
Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2
Пусть $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. *Тогда число* $\boldsymbol{S_n}$ *минимальных вершинных покрытий Цепочки Петерсена* $Ch(n, G(5,2))$ *определяется рекуррентно:*

$$\boldsymbol{S_n = 11S_{n-1} - 4S_{n-2} + 3S_{n-3},\ n \geq 3.\ S_0 = 1, S_1 = 15, S_2 = 165.}$$

Доказательство.
Для Звена $(G(5,2), A, B)$, где $AB \notin E(G(5,2))$, по Теореме 4.1 находим вершинные характеристики:

$$a = 2, b = 3, c = 7,\ d = 1, e = 1, f = 0.$$

Используя (2.1), определяем p, q, r:

$$p = ab + be + bc + cd = 37, q = b^2d - abe + (b + d)(b^2 - ac) = -17,$$
$$r = b^2f - bde + (b + d)(be - cd) = -19.$$

Тогда

$$\frac{p+be-cd}{b} = 11,\ \ \frac{bq+cr+pcd-pbe}{b^2} = -4,\ \frac{b^2r-acr+cqd-bqe}{b^2} = 3.$$

По Теореме 2.1 при $b \neq 0$ получим:

$$S_n = 11S_{n-1} - 4S_{n-2} + 3S_{n-3},\ n \geq 3.\ S_0 = 1,\ S_1 = 15,\ S_2 = 165.$$

Теорема 4.2 доказана.

Заключение

Данная работа является естественным продолжением исследования, начатого в [2].

В Главе 1 приведены понятия Звена графа и вершинных характеристик Звена. Кроме того, в Главе 1 даны определения хорошей, O-почти хорошей и AB-почти хорошей раскрасок графа в чёрный и белый цвета. Ключевым является утверждение, доказанное в Теореме 1.2: количество хороших раскрасок графа в точности совпадает с числом его минимальных вершинных покрытий.

В Главе 2 содержится основной результат по Цепочкам, а именно формула для нахождения числа минимальных вершинных покрытий Цепочки, записанная в рекуррентной форме (Теорема 2.1). Коэффициенты данной формулы зависят от вершинных характеристик Звеньев – составных элементов Цепочки. Указанный результат был получен ранее в [2].

В данной работе нами были исследованы два ярких представителя Цепочек: **Граф Гусеница** и **Цепочка Петерсена**, Звеньями которых служат цикл с концами в смежных вершинх и Граф Петерсена с концами в несмежных вершинами соответственно.

В Главах 3-4 найдены точные значения вершинных характеристик Звеньев, основой которых выступает цикл с концами в смежных вершинах (Теорема 3.2) и граф Петерсена с концами в несмежных вершинах (Теорема 4.1). В Главах 3-4 также установлены рекуррентные формулы для нахождения числа минимальных вершинных покрытий графа Гусеницы (Теорема 3.3) и Цепочки Петерсена (Теорема 4.2).

В процессе исследования нами были использованы различные комбинаторные техники, метод раскраски и методы решения систем уравнений с рекуррентными последовательностями.

Все результаты получены авторами самостоятельно, нетривиальны, и на наш взгляд, представляют несомненный научный интерес в Теории графов.

Следует отметить, что если граф не содержит циклов C_3 и изолированных вершин, то каждое минимальное вершинное покрытие этого графа является минимальным окрестностным множеством, и наоборот. Поэтому результаты нашей работы для Цепочки Петерсена и графа $CP(n,m)$ при $m \geq 4$ могут быть перенесены на минимальные окрестностные множества.

В дальнейшем по данной теме можно выделить 2 направления исследования:
1) Нахождение числа минимальных вершинных покрытий Цепочек второго рода, получаемых путём замыкания Цепочек в цикл;
2) Расширение подклассов Цепочек за счёт изучения новых видов Звеньев.

Источники

1. Задача 13 «Окрестностные множества в графах» // РТЮМ-2018.

2. Листопадов М.В., Пасмурцев Е.С., Калугин П.Д. Вершинные покрытия графов // Доклад на XXV республиканском конкурсе работ исследовательского характера учащихся.

3.https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84_%D0%9F%D0%B5%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B5%D0%BD%D0%B0