МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Гимназия №10 г. Гродно»

ОБРЕЗАНИЕ УГЛОВ

Мартинович Екатерина Петровна
учащаяся 9 «Б» класса
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно»

Кулеш Елена Евгеньевна,
доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Я.Купалы,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
учитель математики
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно»

г. Гродно, 2021

ОБРЕЗАНИЯ УГЛОВ

Е. П. Мартинович
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно», 9 «Б» класс,
Гродно, Беларусь

Научный руководитель – Е. Е. Кулеш, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Я.Купалы,кандидат физ.-мат. наук, доцент, учитель математики ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно».

Работа 19 с., 5 ч., 17рис., 2 источника.

Ключевые слова:площадь, треугольник, многоугольник, геометрическая прогрессия.

В работе исследуется задача, предложенная на VIII Минском городском открытом турнире юных математиков 2021г.Плотник Ёся делает стол в форме равностороннего треугольника, квадрата, многоугольника площади S. Сын плотника отрезает у стола углы, по определенным правилам. Требуется найти площадь стола после *n*разрезов.

Объектом исследования являются геометрические фигуры, полученные после *n* разрезов специального вида.Предметом исследования являются площади полученных геометрических фигур.

Цель работы: найти удобный алгоритм для определения площади стола любой формы после *n* разрезов специального вида.

Основным методом исследования является метод определения площадей отрезаемых фигур, составления последовательностей полученных площадей и нахождение сумм полученных последовательностей.

Поставленная на VIII Минском городском открытом турнире юных математиков 2021г. задача решена полностью. В работе доказаны две леммы, выражающие площади треугольников, отрезаемых на втором шаге через площади треугольников, отрезаемых на первом шаге. Найдены площади стола после *n*-го разреза для всех видов разрезов при первоначальной форме стола в виде треугольника, четырехугольника, равностороннего *M* - угольника. Для треугольного (четырехугольного) стола показано, что площадь после *n*-го разреза не зависит от вида первоначального треугольника (четырехугольника).

Для разрезов, когда стороны многоугольников делятся на *k* частей и отпиливаются треугольники, стороны которых равны 1/*k* стороны фигуры доказано

Утверждение 4.3. После *n*-го разреза правильного *M*-угольника с площадью *S* получим $2^n M$ -угольник с площадью $S\left(1-\frac{4\sin^2\frac{180^\circ}{M}}{k^2-2k+4}\left(1-\left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right)$, *k*>2.

При *k*=2 имеет место

Утверждение 1.4. После *n*-го разреза правильного *M*-угольника с площадью *S* получим правильный *M*-угольник с площадью $S_n = S\cos^{2n}\frac{180^\circ}{M}$.

При *M*=3 и *M*=4 данные утверждения дают результат для треугольника и четырехугольника соответственно.

Результаты данной работы могут бытьиспользованы учащимися школ и гимназий а также учителями при проведении факультативов по подготовке к олимпиадам и математическим турнирам, а также при дальнейшем исследовании схожих тем

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – неотъемлемая составляющая общей культуры, агеометрические методы служат одним из инструментов познания мира,способствуют формированию научных представлений об окружающемпространстве, раскрытию гармонии и совершенства Вселенной. Напротяжении столетий считалось, что «овладение геометрическими знаниямииеобходимо всякому образованному человеку».

Геометрические задачи – неотъемлемая часть любой олимпиады по математике. Более того, они всегда интересны и увлекательны, развивают абстрактное мышление.

Таким образом, научиться решать сложные геометрические и логические задачи, является весьма важной и актуальной задачей, чем и обусловлен выбор темы исследования.

В данной работе решена задача, предложенная на VIII Минском городском открытый турнире юных математиков – 2021, младшая лига, 5-7 классы [1].

Постановка задачи:

I. 1. Плотник Ёся делает стол в форме равностороннего треугольника площади S. Сын плотника, в свободное от путешествий с друзьями время, отмечает точки, которые делят каждую сторону треугольника на две равные части, и отрезает у треугольника три угла по прямым, соединяющим отмеченные точки. Далее к получившейся фигуре он применяет ту же операцию. Найдите площадь фигуры после n-го разреза.

2. Пусть теперь Ёся делает фигуру в форме квадрата площадиS, а его сын продолжает свои шалости (отпиливает уголки по отмеченным точкам). Какая теперь площадь получится после n-ого разреза.

3. Решите предыдущий пункт в случае, когда исходный стол — правильный M-угольник площадиS.

II. Пусть теперь сын Ёси на каждом шаге отмечает на сторонах точки, делящие стороны на 3 равные части и отрезает уголки, стороны которых равны 1/3 стороны (см. рис.1).

Решите пункты I.1–I.3 в этом случае.

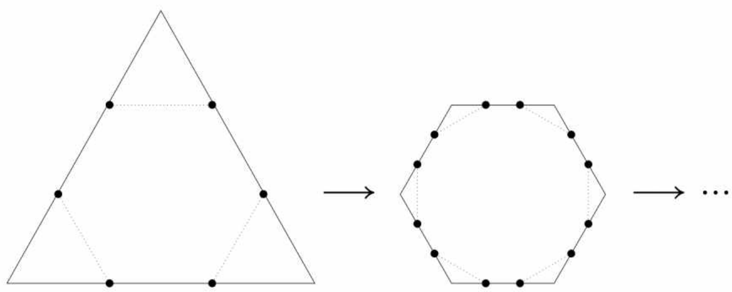


Рис. 1

III. Пусть теперь сын Ёси отмечает точки, делящие стороны на 3 равные части и не отпиливает уголки, а выпиливает из стола фигуры, равные этим уголкам и опирающиеся на отмеченные точки (см. рис.2). Если стол в какой-то момент распадётся на части (см. рис.3), то сын Ёси продолжит выпиливать уголки из каждой части.

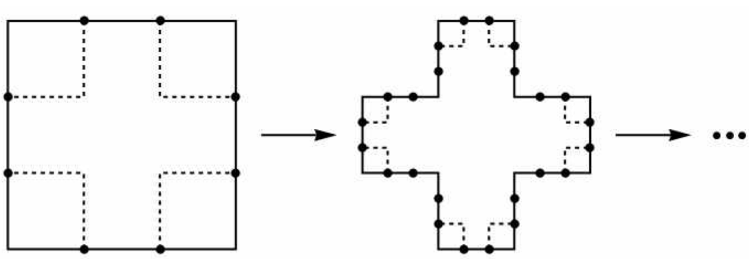


Рис. 2

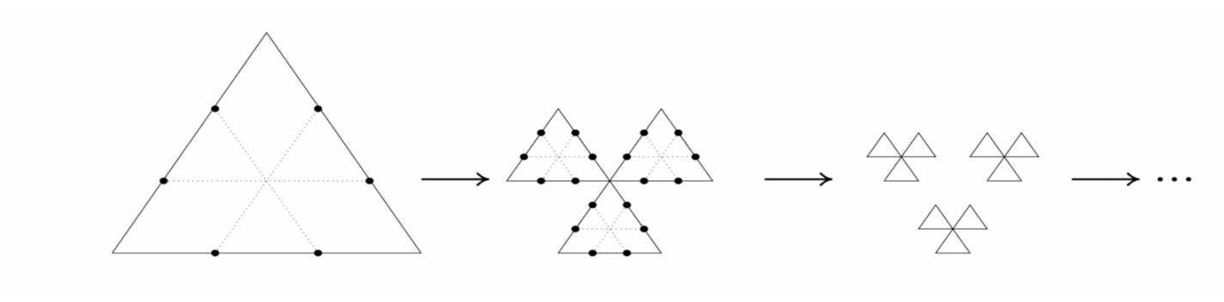


Рис. 3

1.Какова площадь получающегося стола после n-й операции, если исходный стол имел форму правильного треугольника площади S?

2. А если исходный стол имеет форму квадрата площади S?

3. Попробуйте решить эту же задачу для правильногоM-угольника площади S.

IV. Пусть теперь стол имеет форму прямоугольника a´ b, где ab=S. Попробуйте решить пункты I–III в этом случае. А если стол имеет форму прямоугольного треугольника с катетами x и y?

V. Попробуйте повторить исследования пунктов I–IV в случае, когда сын Ёси делит стороны получаемых фигур на k равных частей. Интересны будут даже рассуждения, проведённые для конкретныхk^{1} 2, 3.

VI. Предложите и исследуйте свои обобщения для данной задачи. Например, обобщите данную задачу для объёмов деревянных фигур, у которых сын Ёси так же отпиливает или вырезает углы.

Объект исследования:Геометрические фигуры, полученные после n разрезов специального вида.

Предмет исследования:Площади полученных геометрических фигур.

Цель работы: научиться анализировать числовую информацию, обобщать полученные результаты, решить предложенную задачу о площади геометрических фигур после nразрезов специального вида.

Основным **методом** исследования является метод определения площадей отрезаемых фигур, составления последовательностей полученных площадей и нахождение сумм полученных последовательностей.

1 РАЗРЕЗЫ ПО ПРЯМЫМ, ПРОХОДЯЩИМ ЧЕРЕЗ СЕРЕДИНЫ СТОРОН

Пусть проводятся разрезы по прямым, соединяющим середины сторон.Под первым разрезом будем понимать отрезание всех углов у исходнойфигуры.

1.1 Треугольник

Утверждение 1.1. После n-горазреза равностороннего треугольника с площадью S получим равносторонний треугольник с площадью $S_n = \frac{S}{4^n}$.

Доказательство. Пусть дан правильный треугольник. На рис.1.1 видно, что каждый разрез, проходящий через середины сторон является средней линией исходного треугольника и, следовательно, отсекает от основного треугольника треугольник с площадью $\frac{S}{4}$. Значит, после отрезания трех углов получим треугольник с площадью $S_1 = S - 3\times\frac{S}{4} = \frac{S}{4}$.

Аналогично после второго разреза получим треугольник с площадью $S_2 = \frac{S_1}{4} = \frac{S}{4^2}$.

После n-го – треугольник с площадью $S_n = \frac{S}{4^n}$.

Замечание 1.1. Доказательство утверждения 1.1 останется справедливым и в случае, когда треугольник прямоугольный (рис.1.2) или общего вида. Значит, для любого треугольника с площадью S после n-го разреза получим треугольник с площадью $S_n = \frac{S}{4^n}$.

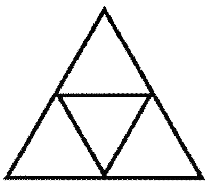
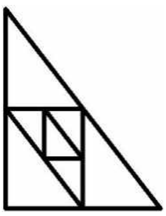
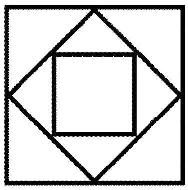
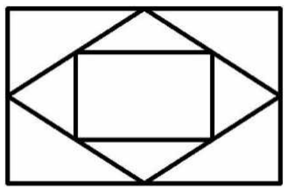
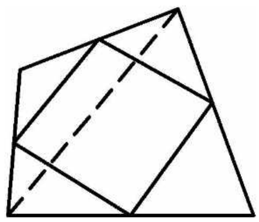






Рис.1.1 **Рис.1.2** **Рис.1.3** **Рис.1.4** **Рис.1.5**

1.2Четырехугольник

Утверждение 1.2. После n-горазреза квадрата с площадью S получим квадрат с площадью $S_n = \frac{S}{2^n}$.

Доказательство. Разрез, проходящий через середины сторон квадрата является средней линией треугольника, полученного при диагональном разрезе исходного квадрата. Значит, площадь треугольника, отсекаемого средней линией равна $\frac{1}{4}\times\frac{S}{2} = \frac{S}{8}$.После $1-$го разреза получится квадрат площадью $S_1 = S - 4\times\frac{S}{8} = \frac{S}{2}$ (рис.1.3). Тогда после второго разреза аналогично получим квадрат с площадью $S_2 = \frac{S_1}{2} = \frac{S}{2^2}$, после n-го $- S_n = \frac{S}{2^n}$.

Замечание 1.2. Доказательство утверждения 1.2 останется справедливым также для прямоугольника(рис.1.4), ромба и параллелограмма, т.к. диагональ делит их на два равновеликих треугольника. Значит, для любого прямоугольника или ромба с площадью S после n-го разреза получим четырехугольник с площадью $S_n = \frac{S}{2^n}$.

Утверждение 1.3. После n-горазреза четырехугольника с площадью S получим четырехугольник с площадью $S_n = \frac{S}{2^n}$.

Доказательство. Одна из диагоналей четырехугольника делит его на два треугольника с площадями S_1 и S_2, причем $S = S_1 + S_2$. Разрезы, проходящие через середины сторон четырехугольника параллельно данной диагонали, являются средними линиями данных треугольников и отсекают треугольники с площадями $\frac{S_1}{4}$ и $\frac{S_2}{4}$, причем $\frac{S_1}{4} + \frac{S_2}{4} = \frac{S}{4}$ (рис.1.5). Аналогично разрезы параллельные второй диагонали отсекают два треугольника с общей площадью $\frac{S}{4}$. Значит, после первого разреза получим четырехугольник с площадью равной $S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4} = \frac{S}{2}$, после второго $\frac{S}{4}$, после n-го $\frac{S}{2^n}$.

1.3Правильный *M*-угольник

Утверждение 1.4. После n-горазреза правильного M-угольника с площадью S получим правильный M-угольник с площадью $S_n = S\cos^{2n}\frac{180°}{M}$.

Доказательство. Пусть дан правильныйM-угольник со стороной a.Сумма углов M-угольникаравна $180°(M-2)$.Тогда угол M-угольника равен $\frac{180°(M-2)}{M} = 180° - \frac{360°}{M}$.

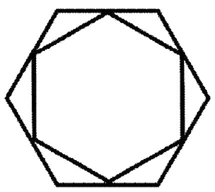


Рис.1.6

Площадь одного отрезанного треугольника равна:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin\left(180° - \frac{360°}{M}\right) = \frac{a^2}{8}\sin\frac{360°}{M}.$$

Площадь правильного M-угольникасо стороной a равна $S = pr,\ p = \frac{Ma}{2}, r = \frac{a}{2tg\frac{180°}{M}}$. Тогда $S = \frac{Ma^2}{4tg\frac{180°}{M}}$. Отсюда найдем $a^2 = \frac{4Stg\frac{180°}{M}}{M}$. С учетом этого получим

$$S_\Delta = \frac{1}{8}\cdot\frac{4S\cdot tg\frac{180°}{M}}{M}\cdot\sin\frac{360°}{M} = \frac{S}{2M}\cdot\frac{\sin\frac{180°}{M}}{\cos\frac{180°}{M}}\cdot 2\sin\frac{180°}{M}\cdot\cos\frac{180°}{M} = \frac{S}{M}\sin^2\frac{180°}{M}.$$

После первого разреза получим правильный M-угольник(рис 1.6) с площадью

$$S_1 = S - M\cdot S_\Delta = S - S\sin^2\frac{180°}{M} = S\cos^2\frac{180°}{M}.$$

Тогда после второгоразреза аналогично получим правильный M-угольник с площадью:

$$S_2 = S_1\cos^2\frac{180°}{M} = S\cos^4\frac{180°}{M}.$$

Послеn-го:

$$S_n = S\cos^{2n}\frac{180°}{M}.$$

2РАЗРЕЗЫ ПО ПРЯМЫМ, ПРОХОДЯЩИМ ЧЕРЕЗ ТОЧКИ НА СТОРОНАХ ФИГУР НА РАССТОЯНИИ $a/3$ ОТВЕРШИНЫ

Сейчас на каждом шаге на сторонах фигур отмечаются точки, делящие их на 3 равные части и отрезаютсятреугольники, стороны которых равны 1/3 стороны фигуры.

Докажем вначале вспомогательное утверждение.

Лемма 1.Пусть дан угол $\angle ABC=\alpha$, $AB=a$, $BC=b$. На стороне AB взята точка K, $KB=\dfrac{a}{3}$. На стороне BC взята точка L, $BL=\dfrac{b}{3}$. Площадь треугольника KBL равнаS. На сторонeAK взята точка M, $MK=\dfrac{a}{9}$. На сторонeLC взята точка Q, $LQ=\dfrac{b}{9}$. ТочкиN иPделят отрезокKL на три равные части. Тогда площади треугольниковMKN иPLQ равны $\dfrac{S}{9}$.

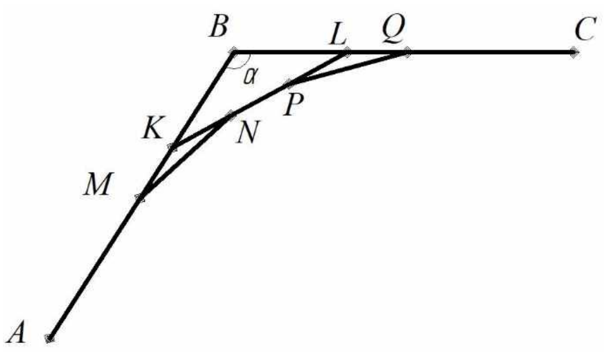


Рис.2.1

Доказательство. Распишем площадь треугольника KBL (рис.2.1).

$$S_{\triangle KBL}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{3}\cdot\sin\alpha=\frac{ab\sin\alpha}{18}=S.$$

Отсюда $ab\sin\alpha=18S$. Запишем теорему синусов для$\triangle KBL$:

$$\frac{KB}{\sin\angle KLB}=\frac{BL}{\sin\angle LKB}=\frac{KL}{\sin\angle KBL};\ \frac{a}{3\sin\angle KLB}=\frac{b}{3\sin\angle LKB}=\frac{KL}{\sin\alpha}.$$

Отсюда найдем $\sin\angle KLB=\dfrac{a\sin\alpha}{3KL}$, $\sin\angle LKB=\dfrac{b\sin\alpha}{3KL}$. Найдем площади треугольников MKN иPLQ:

$$S_{\triangle MKN}=\frac{1}{2}\cdot KM\cdot KN\cdot\sin\angle MKN=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{9}\cdot\frac{KL}{3}\cdot\sin\left(180^\circ-\angle LKB\right)=\frac{aKL}{54}\cdot\sin\angle LKB=$$

$$=\frac{aKL}{54}\frac{b\sin\alpha}{3KL}=\frac{ab\sin\alpha}{162}=\frac{18S}{162}=\frac{S}{9}.$$

$$S_{\triangle PLQ}=\frac{1}{2}\cdot PL\cdot LQ\cdot\sin\angle PLQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{9}\cdot\frac{KL}{3}\cdot\sin\left(180^\circ-\angle KBL\right)=\frac{bKL}{54}\cdot\sin\angle KBL=$$

$$=\frac{bKL}{54}\cdot\frac{a\sin\alpha}{3KL}=\frac{ab\sin\alpha}{162}=\frac{18S}{162}=\frac{S}{9}.$$

Лемма1 доказана.

2.1 Треугольник

Утверждение 2.1. После n-горазреза равностороннего треугольника с площадью S получим $3\cdot 2^n$-угольник с площадью $S\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$.

Доказательство. Пусть дан равносторонний треугольник площадью S. После первого разреза от него отрежутся три треугольника с площадями $\frac{S}{9}$ (т.к. каждый подобен исходному треугольнику с коэффициентами подобия $\frac{1}{3}$). Значит после первого разреза получим 6-угольник площадью $S_1 = S - 3\cdot\frac{S}{9} = \frac{2S}{3}$ (рис. 2.2).

После второго разреза отрежется 6 треугольников с площадью $\frac{S}{9^2}$ каждый (в силу Леммы 1). Поэтому получим 12-угольник с площадью

$$S_2 = S - \frac{S}{3} - 6\cdot\frac{S}{9^2} = S\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3^3}\right).$$

После третьего разреза получим 24-угольник с площадью

$$S_3 = S\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3^3}\right) - 12\cdot\frac{S}{9^3} = S\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3^3}-\frac{4}{3^5}\right).$$

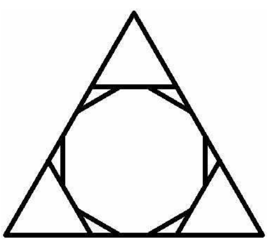
Так как после каждого разреза на месте вершины образуется две вершины, то число вершин после каждой операции удваивается. После n-горазреза получим $3\cdot 2^n$-угольник с площадью

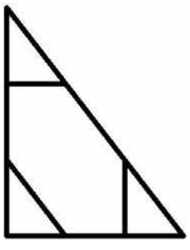
$$S_n = S\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3^3}-\frac{2^2}{3^5}-\ldots-\frac{2^{n-1}}{3^{2n-1}}\right) = S\left(1-\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{9}}\right) =$$

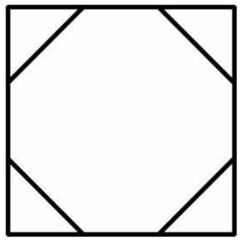
$$= S\left(1-\frac{3}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\right) = S\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n\right).$$

Здесь воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

Замечание 2.1. Доказательство утверждения 2.1 останется справедливым и в случае, когда треугольник прямоугольный (рис. 2.3) или общего вида. Значит, для любого треугольника с площадью S после n-го разреза получим $3\cdot 2^n$-угольник с площадью $S\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$.







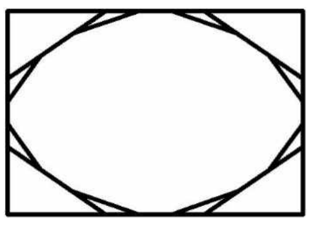


Рис.2.2 Рис.2.3 Рис.2.4 Рис.2.5

2.2Четырехугольник

Утверждение 2.2. После n-горазреза квадрата с площадью S получим 2^{n+2} - угольник с площадью $S\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$.

Доказательство. Пусть дан квадрат площадьюS(рис. 2.4). После первогоразреза отрежутся 4 треугольника площадью $\frac{S}{18}$ каждый, так как каждый из них подобен треугольнику с площадью $\frac{S}{2}$, который получается при диагональном разрезе квадрата, с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$. В результате получим 8-угольник с площадью $S_1=S-4\cdot\frac{S}{18}=S\left(1-\frac{2}{9}\right)$.

После второго разреза отрежутся 8 треугольников с площадями $\frac{S}{18\cdot 9}$ (в силу Леммы 1). Поэтому получим 16-угольник с площадью

$$S_2=S\left(1-\frac{2}{9}\right)-8\cdot\frac{S}{18\cdot 9}=S\left(1-\frac{2}{9}-\frac{4}{9^2}\right).$$

После третьего разреза получим 32-угольник с площадью

$$S_3=S\left(1-\frac{2}{9}-\frac{4}{9^2}\right)-16\cdot\frac{S}{18\cdot 9^2}=S\left(1-\frac{2}{9}-\frac{4}{9^2}-\frac{8}{9^3}\right).$$

После n-горазрезаполучим 2^{n+2} - угольникс площадью

$$S_n=S\left(1-\frac{2}{9}-\left(\frac{2}{9}\right)^2-\left(\frac{2}{9}\right)^3-\ldots-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)=S\left(1-\frac{\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{9}}\right)=$$

$$=S\left(1-\frac{2}{7}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\right)=S\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right).$$

Замечание 2.2. Доказательство утверждения 2.1 останется справедливым также для прямоугольника (рис. 2.5), ромба и параллелограмма, т.к. диагональ делит их на два равновеликих треугольника. Значит, для любого прямоугольника, ромба или параллелограмма с площадью S после n-го разреза получим 2^{n+2} - угольник с площадью $S\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$.

Утверждение 2.3. После n-го разреза четырехугольника с площадью S получим 2^{n+2} - угольник с площадью $S\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$.

Доказательство. Одна из диагоналей четырехугольника делит его на два треугольника с площадями S_1 и S_2, причем $S=S_1+S_2$. Разрезы, проходящие через точки на сторонах четырехугольника на расстоянии1/3 стороны считая от вершины параллельно данной диагонали, отсекают треугольники с площадями $\frac{S_1}{9}$ и $\frac{S_2}{9}$, причем $\frac{S_1}{9}+\frac{S_2}{9}=\frac{S}{9}$ (рис.1.5). Аналогично разрезы параллельные второй диагонали отсекают два треугольника с общей площадью $\frac{S}{9}$. Значит, после первого разреза получим 8-угольник с площадью равной $S-\frac{S}{9}-\frac{S}{9}=S-\frac{2S}{9}$.После второго разреза в силу леммы 1 отрезается 4 треугольника с общей площадью $\frac{4S_1}{81}$ и 4 треугольника с общей площадью $\frac{4S_2}{81}$. В результате остается 16-угольник с площадью $S-\frac{2S}{9}-\frac{4S_1}{81}-\frac{4S_2}{81}=S\left(1-\frac{2}{9}-\frac{4}{81}\right)$. И далее аналогично после n-го разреза остается 2^{n+2} - угольник с площадью $S_n=S\left(1-\frac{2}{9}-\left(\frac{2}{9}\right)^2-\left(\frac{2}{9}\right)^3-\ldots-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)=S\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$

2.3Правильный *M*-угольник

Утверждение 2.4. После n-го разреза правильного M-угольника с площадью S получим $2^n M$ -угольник с площадью $S\left(1-\frac{4}{7}\sin^2\frac{180°}{M}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\right)$.

Доказательство. Пусть дан правильный M-угольник.Площадь первого отрезанного треугольника равна:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\left(180°-\frac{360°}{M}\right)=\frac{a^2}{18}\sin\frac{360°}{M}.$$

В п.1.3 показано, что $a^2=\frac{4S\,tg\frac{180°}{M}}{M}$. Тогда

$$S_\Delta=\frac{4S\,tg\frac{180°}{M}}{18M}\sin\frac{360°}{M}=\frac{2S}{9M}\cdot\frac{\sin\frac{180°}{M}}{\cos\frac{180°}{M}}\cdot 2\sin\frac{180°}{M}\cdot\cos\frac{180°}{M}=\frac{4S}{9M}\sin^2\frac{180°}{M}.$$

После первого разреза получим $2M$-угольникс площадью

$$S_1=S-M\cdot S_\Delta=S\left(1-\frac{4}{9}\sin^2\frac{180°}{M}\right).$$

После второго разреза получи $2M$-угольникс площадью:

$$S_2=S\left(1-\frac{4}{9}\sin^2\frac{180°}{M}\right)-2M\cdot\frac{4S}{9^2M}\sin^2\frac{180°}{M}=S\left(1-\frac{4}{9}\sin^2\frac{180°}{M}-\frac{8}{9^2}\sin^2\frac{180°}{M}\right).$$

После n – го разреза получим $2^n M$ -угольник с площадью

$$S_n=S\left(1-\frac{4}{9}\sin^2\frac{180°}{M}-\frac{2^3}{9^2}\sin^2\frac{180°}{M}-\ldots-\frac{2^{n+1}}{9^n}\sin^2\frac{180°}{M}\right)=$$

$$=S\left(1-\frac{\frac{4}{9}\sin^2\frac{180°}{M}\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{9}}\right)=S\left(1-\frac{4}{7}\sin^2\frac{180°}{M}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\right).$$

3 ВЫПИЛИВАЮТСЯ ИЗ СТОЛА ФИГУРЫ, РАВНЫЕ ОТПИЛИВАЕМЫМ УГОЛКАМ

Сейчас на каждом шаге на сторонах фигур отмечаются точки, делящие их на 3 равные части, как и в прошлом разделе, но выпиливаются не треугольники, афигуры равные этим треугольникам.Если стол в какой-то момент распадётся на части (см. рис.3), то сын Ёси продолжит выпиливать уголки из каждой части.В данном случае площадь выпиливаемого куска равна удвоенной площади треугольника, отпиливаемого в разделе 2.

3.1 Треугольник

Утверждение 3.1. После *n*-горазреза равностороннего треугольника с площадью S получим 3^n равносторонних треугольников с общей площадью $\frac{S}{3^n}$.

Доказательство. Пусть дан правильный треугольник. Площадь одной отпиленной части равна $2\times\frac{S}{9}$. Тогда после первого разреза получится 3 равносторонних треугольника с общей площадью $S_1 = S - 3\times\frac{2S}{9} = \frac{S}{3}$. После второго – 9 равносторонних треугольников с общей площадью $S_2 = \frac{S_1}{3} = \frac{S}{9}$. После третьего – 27 равносторонних треугольников с общей площадью $S_3 = \frac{S_2}{3} = \frac{S}{3^3}$. После *n*-го – 3^n треугольников с общей площадью $\frac{S}{3^n}$.

Замечание 3.1.После *n*-горазреза произвольного треугольника с площадью S получим 3^n треугольников с общей площадью $\frac{S}{3^n}$.

3.2Четырехугольник

Утверждение 3.2. После указанных разрезов квадрата с площадью S получим фигуры с площадями $S_1 = \frac{5S}{9}$, $S_2 = \frac{37S}{81}$, $S_3 = \frac{103S}{243}$, $S_4 = \frac{2693S}{6561}$, $S_5 = \frac{23893S}{59049}$.

Доказательство. Пусть дан квадрат с площадью $S = a^2$ (рис. 3.1). Первый раз выпиливается 4 квадрата со стороной $\frac{a}{3}$. При этом получится невыпуклая фигура с площадью

$$S_1 = S - 4\times\frac{a^2}{9} = S - \frac{4}{9}S = \frac{5}{9}S .$$

Второй раз отпиливается 8 квадратов со стороной $\frac{a}{9}$. Получим

$$S_2 = \frac{5}{9}S - 8\times\frac{a^2}{9^2} = S\left(\frac{5}{9} - \frac{8}{9^2}\right) = \frac{37S}{81} .$$

В третий раз отпиливается 8 квадратов со стороной $\frac{a}{3^3}$ и 8 прямоугольников с размерами $\frac{a}{3^3}\times\frac{2a}{3^3}$. Получим фигуру с площадью

$$S_3 = \frac{37S}{81} - 8\times\frac{a^2}{3^6} - 8\times\frac{2a^2}{3^6} = S\left(\frac{37}{81} - \frac{2^3}{3^5}\right) = \frac{103S}{243}$$

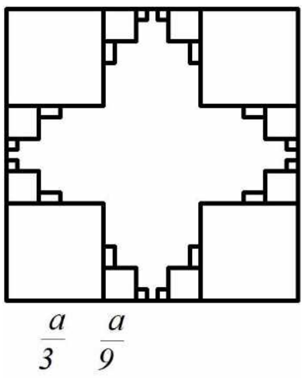
В четвертый раз отпиливается 8 квадратов со стороной $\frac{a}{3^4}$, 8 прямоугольников $\frac{a}{3^4}\times\frac{2a}{3^4}$, 8 прямоугольников $\frac{2a}{3^4}\times\frac{2a}{3^4}$ и 8 прямоугольников $\frac{a}{3^4}\times\frac{4a}{3^4}$. Получим фигуру с площадью

$$S_4=\frac{103S}{243}-8\cdot\frac{a^2}{3^8}-8\cdot\frac{2a^2}{3^8}-8\cdot\frac{4a^2}{3^8}-8\cdot\frac{4a^2}{3^8}=S\left(\frac{103}{243}-8\cdot\frac{11}{3^8}\right)=\frac{2693S}{6561}.$$

В пятый раз отпиливается 8 квадратов со стороной $\frac{a}{3^5}$, 8 прямоугольников $\frac{a}{3^5}\times\frac{2a}{3^5}$, 8 прямоугольников $\frac{2a}{3^5}\times\frac{2a}{3^5}$, 8 прямоугольников $\frac{a}{3^5}\times\frac{4a}{3^5}$, 8 прямоугольников $\frac{4a}{3^5}\times\frac{2a}{3^5}$, 16 прямоугольников $\frac{2a}{3^5}\times\frac{4a}{3^5}$, 8 прямоугольников $\frac{a}{3^5}\times\frac{8a}{3^5}$. Получим

$$S_5=\frac{2693S}{6561}-8\cdot\frac{43a^2}{3^{10}}=S\left(\frac{2693}{6561}-8\cdot\frac{43}{3^{10}}\right)=\frac{23893S}{59049}.$$

Замечание 3.2. Утверждение 3.2 остается справедливым и для прямоугольника площадью S.



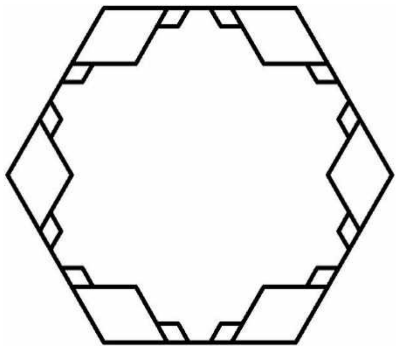


Рис. 3.1 Рис. 3.2

3.3 Правильный *M*-угольник

Утверждение 3.3. После указанных разрезов правильного M-угольника с площадью S получим фигуры с площадями $S_1=S\left(1-\frac{8}{9}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)$, $S_2=S\left(1-\frac{88}{81}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)$, $S_3=S\left(1-\frac{280}{243}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)$, $S_4=S\left(1-\frac{7736}{6561}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)$, $S_5=S\left(1-\frac{70312}{59049}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)$.

Доказательство. Пусть дан правильный M-угольник площадью S (рис. 3.2). В первый раз вырезается M ромбов с площадью равной удвоенной площади треугольника из п.2.3 $S_{ромб}=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\sin\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{M}\right)=\frac{8S}{9M}\sin^2\frac{180^\circ}{M}$. Тогда после первого разреза останется фигура с площадью

$$S_1=S-M\cdot S_{ромб}=S\left(1-\frac{8}{9}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)$$

Второй раз вырезается $2M$ ромбов со стороной $\frac{a}{9}$. Тупые углы вновь выпиливаемых ромбов равны углам исходного M-угольника. Поэтому получим

$$S_2 = S_1 - 2M \cdot \frac{a}{9} \cdot \frac{a}{9} \sin\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{M}\right) = S_1 - \frac{16S}{9^2 M} \sin^2 \frac{180^\circ}{M} = S\left(1 - \frac{88}{81} \sin^2 \frac{180^\circ}{M}\right).$$

В третий раз вырезается $2M$ ромбов со стороной $\frac{a}{3^3}$ и $2M$ параллелограммов со сторонами $\frac{a}{3^3}$, $\frac{2a}{3^3}$.

$$S_3 = S_2 - 2M \cdot \frac{3a^2}{3^6} \sin\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{M}\right) = S_2 - \frac{16}{3^5} S \sin^2 \frac{180^\circ}{M} = S\left(1 - \frac{280}{243} \sin^2 \frac{180^\circ}{M}\right).$$

В четвертый раз вырезается $2M$ромбов со стороной $\frac{a}{3^4}$, $2M$параллелограммов $\frac{a}{3^4}$, $\frac{2a}{3^4}$,$2M$параллелограммов $\frac{2a}{3^4}$, $\frac{2a}{3^4}$, $2M$параллелограммов $\frac{a}{3^4}$, $\frac{4a}{3^4}$.

$$S_4 = S_3 - 2M \cdot \frac{11a^2}{3^8} \sin\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{M}\right) = S_3 - \frac{16 \cdot 11}{3^8} S \sin^2 \frac{180^\circ}{M} = S\left(1 - \frac{7736}{6561} \sin^2 \frac{180^\circ}{M}\right).$$

В пятый раз вырезается $2M$ ромбов со стороной $\frac{a}{3^5}$, $2M$параллелограммов $\frac{a}{3^5}$, $\frac{2a}{3^5}$,$2M$ параллелограммов $\frac{2a}{3^5}$, $\frac{2a}{3^5}$,$2M$ параллелограммов $\frac{a}{3^5}$, $\frac{4a}{3^5}$,$2M$ параллелограммов $\frac{4a}{3^5}$, $\frac{2a}{3^5}$, $4M$ параллелограммов $\frac{2a}{3^5}$, $\frac{4a}{3^5}$, $2M$ параллелограммов $\frac{a}{3^5}$, $\frac{8a}{3^5}$. Получим

$$S_5 = S_4 - 2M \cdot \frac{43a^2}{3^{10}} \sin\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{M}\right) = S_4 - \frac{16 \cdot 43}{3^{10}} S \sin^2 \frac{180^\circ}{M} = S\left(1 - \frac{70312}{59049} \sin^2 \frac{180^\circ}{M}\right).$$

4 РАЗРЕЗЫ ПО ПРЯМЫМ, ПРОХОДЯЩИМ ЧЕРЕЗ ТОЧКИ НА СТОРОНАХ ФИГУР НА РАССТОЯНИИ a/k ОТ ВЕРШИНЫ

Пусть сейчас стороны многоугольников делятся на k частей, $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$ и отпиливаются треугольники, стороны которых равны $1/k$ стороны фигуры.

Докажем вначале вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть дан угол $\angle ABC = \alpha$, $AB = a$, $BC = b$. На стороне AB взята точка K, $KB = \frac{a}{k}$. На стороне BC взята точка L, $BL = \frac{b}{k}$. Площадь треугольника KBL равна S. На стороне AK взята точка M, $KM = \frac{(k-2)a}{k^2}$. На стороне LC взята точка Q, $LQ = \frac{(k-2)b}{k^2}$. На стороне KL взяты точки N и P так, что $KN = LP = \frac{KL}{k}$. Тогда площади треугольников MKN и PLQ равны $\frac{(k-2)S}{k^2}$ (рис. 2.1).

Доказательство. Распишем площадь треугольника KBL

$$S_{\triangle KBL} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{k}\cdot\frac{b}{k}\cdot\sin\alpha = \frac{ab\sin\alpha}{2k^2} = S.$$

Отсюда $ab\sin\alpha = 2k^2 S$. Запишем теорему синусов для $\triangle KBL$:

$$\frac{KB}{\sin\angle KLB} = \frac{BL}{\sin\angle LKB} = \frac{KL}{\sin\angle KBL};\ \frac{a}{k\sin\angle KLB} = \frac{b}{k\sin\angle LKB} = \frac{KL}{\sin\alpha}.$$

Отсюда найдем $\sin\angle KLB = \frac{a\sin\alpha}{k\cdot KL}$, $\sin\angle LKB = \frac{b\sin\alpha}{k\cdot KL}$. Найдем площади треугольников MKN и PLQ:

$$S_{\triangle MKN} = \frac{1}{2}\cdot KM\cdot KN\cdot\sin\angle MKN = \frac{1}{2}\cdot\frac{(k-2)a}{k^2}\cdot\frac{KL}{k}\cdot\sin\angle LKB = \frac{k-2}{2k^3}aKL\frac{b\sin\alpha}{k\cdot KL} =$$

$$= \frac{k-2}{2k^4}\cdot ab\sin\alpha = \frac{k-2}{2k^4}\cdot 2k^2 S = \frac{(k-2)S}{k^2}.$$

$$S_{\triangle PLQ} = \frac{1}{2}\cdot LQ\cdot LP\cdot\sin\angle PLQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{k^2}\cdot\frac{KL}{k}\cdot\sin\angle KBL = \frac{k-2}{2k^3}\cdot bKL\frac{a\sin\alpha}{k\cdot KL} =$$

$$= \frac{k-2}{2k^4}\cdot ab\sin\alpha = \frac{k-2}{2k^4}\cdot 2k^2 S = \frac{(k-2)S}{k^2}.$$

Лемма 2 доказана.

4.1 Треугольник

Утверждение 4.1. После n-го разреза треугольника с площадью S получим $3\cdot 2^n$-угольник с площадью $S\left(1 - \frac{3}{k^2-2k+4}\left(1-\left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right)$.

Доказательство. Пусть дан треугольник (не обязательно равносторонний) с площадью S. После первого разреза от него отрежутся три треугольника с площадями $\frac{S}{k^2}$ (т.к. каждый подобен исходному треугольнику с коэффициентами подобия $\frac{1}{k}$). При каждом следующем разрезе площади отрезаемых треугольников в силу леммы 2 умножаются на $\frac{k-2}{k^2}$, а число треугольников удваивается. Т.о., получим

$$S_1 = S - 3\cdot\frac{S}{k^2} = S\left(1 - \frac{3}{k^2}\right); \qquad S_2 = S - \frac{3S}{k^2} - 6\cdot\frac{(k-2)S}{k^4} = S\left(1 - \frac{3}{k^2} - \frac{6(k-2)}{k^4}\right);$$

$$S_3 = S_2 - 12\cdot\frac{(k-2)^2 S}{k^6} = S\left(1 - \frac{3}{k^2} - \frac{3\cdot 2(k-2)}{k^4} - \frac{3\cdot 2^2(k-2)^2}{k^6}\right);$$

$$S_n = S\left(1 - \frac{3}{k^2} - \frac{3\cdot 2(k-2)}{k^4} - \frac{3\cdot 2^2(k-2)^2}{k^6} - \ldots - \frac{3\cdot 2^{n-1}(k-2)^{n-1}}{k^{2n}}\right) =$$

$$= S\left(1 - \frac{\frac{3}{k^2}\left(1 - \left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)}{1 - \frac{2(k-2)}{k^2}}\right) = S\left(1 - \frac{3}{k^2 - 2k + 4}\left(1 - \left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right).$$

4.2Четырехугольник

Утверждение 4.2. После n-горазреза параллелограмма с площадью S получим 2^{n+2} - угольник с площадью $S\left(1 - \frac{2}{k^2 - 2k + 4}\left(1 - \left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right)$.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм (квадрат, прямоугольник, ромб)с площадью S.Первый раз отрезаем от него 4 треугольника с площадью $\frac{S}{2k^2}$, так как каждый из них подобен треугольнику с площадью $\frac{S}{2}$, который получается при диагональном разрезе параллелограмма, с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$. При каждом следующем разрезе площади отрезаемых треугольников в силу леммы 2 умножаются на $\frac{k-2}{k^2}$, а число треугольников удваивается. Т.о. получим

$$S_1 = S - 4\frac{S}{2k^2} = S\left(1 - \frac{2}{k^2}\right); \; S_2 = S_1 - 8\cdot\frac{S(k-2)}{2k^4} = S\left(1 - \frac{2}{k^2} - \frac{4(k-2)}{k^4}\right);$$

$$S_3 = S_2 - 16\cdot\frac{S(k-2)^2}{2k^6} = S\left(1 - \frac{2}{k^2} - \frac{2^2(k-2)}{k^4} - \frac{2^3(k-2)^2}{k^6}\right);$$

$$S_n = S\left(1 - \frac{2}{k^2} - \frac{2^2(k-2)}{k^4} - \ldots - \frac{2^n(k-2)^{n-1}}{k^{2n}}\right) = S\left(1 - \frac{\frac{2}{k^2}\left(1 - \left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)}{1 - \frac{2(k-2)}{k^2}}\right) =$$

$$= S\left(1 - \frac{2}{k^2 - 2k + 4}\left(1 - \left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right).$$

Замечание4.1.Утверждение 4.2 остается справедливым и для четырехугольника общего вида.

Доказательство. Одна из диагоналей четырехугольника делит его на два треугольника с площадями S_1 и S_2, причем $S = S_1 + S_2$. Разрезы, проходящие через точки на сторонах четырехугольника на расстоянии $1/k$ стороны считая от вершины параллельно данной диагонали, отсекают треугольники с площадями $\frac{S_1}{k^2}$ и $\frac{S_2}{k^2}$, причем $\frac{S_1}{k^2}+\frac{S_2}{k^2}=\frac{S}{k^2}$. Аналогично разрезы параллельные второй диагонали отсекают два треугольника с общей площадью $\frac{S}{k^2}$. При каждом следующем разрезе площади отрезаемых треугольников в силу леммы 2 умножаются на $\frac{k-2}{k^2}$, а число треугольников каждого вида удваивается. Т.о., получим $S_1 = S-\frac{S}{k^2}-\frac{S}{k^2}=S\left(1-\frac{2}{k^2}\right)$ И далее аналогично как в утверждении 4.2 $S_n = S\left(1-\frac{2}{k^2-2k+4}\left(1-\left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right)$.

4.3Правильный *M*-угольник

Утверждение 4.3. После *n*-го разреза правильного *M*-угольника с площадью *S* получим $2^n M$ -угольник с площадью $S\left(1-\frac{4\sin^2\frac{180^\circ}{M}}{k^2-2k+4}\left(1-\left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right)$.

Доказательство. Рассмотрим правильный*M*-угольник с*M* вершинами. При первом разрезе отрезаются *M*треугольников с площадями

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\frac{a}{k}\frac{a}{k}\sin\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{M}\right)=\frac{4S\,tg\frac{180^\circ}{M}}{2k^2M}\sin\frac{360^\circ}{M}=\frac{4S\sin^2\frac{180^\circ}{M}}{k^2M}.$$

При каждом следующем разрезе площади отрезаемых треугольников в силу леммы 2 умножаются на$\frac{k-2}{k^2}$, а число треугольников удваивается. Т.о. получим

$$S_1=S-M\,S_\Delta=S-\frac{4S}{k^2}\sin^2\frac{180^\circ}{M}=S\left(1-\frac{4}{k^2}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right);$$

$$S_2=S_1-2M\cdot\frac{4S(k-2)}{k^4M}\sin^2\frac{180^\circ}{M}=S\left(1-\left(\frac{4}{k^2}+\frac{8(k-2)}{k^4}\right)\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right);$$

$$S_3=S_2-4M\cdot\frac{4S(k-2)^2}{k^6M}\sin^2\frac{180^\circ}{M}=S\left(1-\left(\frac{2^2}{k^2}+\frac{2^3(k-2)}{k^4}+\frac{2^4(k-2)^2}{k^6}\right)\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right);$$

$$S_n=S\left(1-\left(\frac{2^2}{k^2}+\frac{2^3(k-2)}{k^4}+\ldots+\frac{2^{n+1}(k-2)^{n-1}}{k^{2n}}\right)\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)=$$

$$=S\left(1-\frac{\frac{4}{k^2}\left(1-\left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)}{1-\frac{2(k-2)}{k^2}}\sin^2\frac{180^\circ}{M}\right)=S\left(1-\frac{4\sin^2\frac{180^\circ}{M}}{k^2-2k+4}\left(1-\left(\frac{2(k-2)}{k^2}\right)^n\right)\right)$$

5ОТПИЛИВАЮТСЯ УГЛЫ У КУБА

Пусть у куба объема V ребра делятся пополам и отпиливаются углы (рис. 5.1). При первом разрезе отрезается 8 треугольных пирамид объема $V_{пир} = \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{48} = \frac{V}{48}$. Тогда останется тело с объемом

$$V_1 = V - 8V_{пир} = V - 8\cdot\frac{V}{48} = \frac{5}{6}V .$$

Если ребра делятся на 3 части , и отрезается одна треть от вершины, то

$$V_1 = V - 8\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{a}{3}\right)^3 = V - 8\cdot\frac{V}{6\cdot 27} = \frac{77}{81}V .$$

Если ребра делятся на k частей и отрезаются a/kот вершины, то

$$V_1 = V - 8\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{a}{k}\right)^3 = V - \frac{4}{3k^3}V = V\left(1 - \frac{4}{3k^3}\right).$$

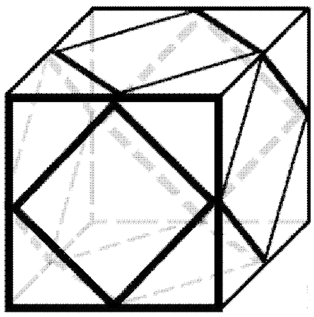


Рис. 5.1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленная на VIII Минском городском открытом турнире юных математиков 2021г. задача решена полностью. В работе доказаны две леммы, выражающие площади треугольников, отрезаемых на втором шаге через площади треугольников, отрезаемых на первом шаге. Найдены площади стола после n-го разреза для всех видов разрезов при первоначальной форме стола в виде треугольника, четырехугольника, равностороннего M-угольника. Для треугольного (четырехугольного) стола показано, что площадь после n-го разреза не зависит от вида первоначального треугольника (четырехугольника).Результаты пункта 4 при k=3 совпадают с результатами пункта 2. Результаты всех пунктов, полученные для треугольников и четырехугольников совпадают с результатами для M-угольниковпри M=3 и M=4соответственно.

Результаты данной работы могут быть использованы учащимися школ и гимназий а также учителями при проведении факультативов по подготовке к олимпиадам и математическим турнирам, а также при дальнейшем исследовании схожих тем

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. https://uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html