XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс
научно-исследовательских работ учащихся средних,
средних специальных учебных заведений и студентов вузов
«От Альфа к Омеге...» (с международным участием)
Секция 1. Алгебра, геометрия и математический анализ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Гимназия № 1 имени
академика Е.Ф. Карского г. Гродно»

ЗАВИСИМОСТЬ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА ОТ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ВЕРШИНЫ

Могилевец Денис Эдуардович
учащийся 9 «М» класса

Курчевская Тереса Юльяновна,
учитель математики
ГУО «Гимназия № 1 имени академика
Е.Ф. Карского г. Гродно»,
высшая кв. категория учителя математики

Гродно, 2021

ЗАВИСИМОСТЬ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА ОТ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ВЕРШИНЫ

Д. Э. Могилевец
ГУО «Гимназия № 1 имени академика Е.Ф. Карского г. Гродно», 9 «М» класс,
Гродно, Беларусь

Научный руководитель – Т. Ю. Курчевская, учитель математики ГУО «Гимназия № 1 имени академика Е.Ф. Карского г. Гродно», высшая кв. категория учителя математики.

Работа 17 с., 3 ч., 7 рис., 4 источников, 10 прил.

Ключевые слова: треугольник, центр масс, ортоцентр треугольника, центр описанной окружности, график функции, декартова система координат.

В работе исследуется зависимость траектории движения центра масс, центра описанной окружности, ортоцентра треугольника от траектории движения подвижной вершины треугольника.

Объектом исследования является треугольник. Предметом исследования – некоторые замечательные точки треугольника.

Цель работы – исследование зависимости траектории движения некоторых замечательных точек треугольника от траектории движения подвижной вершины треугольника.

В результате исследования были получены следующие результаты:

1. Центр масс треугольника, имеющего одну подвижную вершину, движется по траектории в три раза меньшей, чем траектория подвижной вершины и повторяет траекторию движения этой вершины. Если подвижная вершина движется по графику функции y = f(x), то центр масс движется по графику функции $g(x) = \frac{1}{3}f(3(x-\frac{b}{3}))$.

2. Общий вид функции, по графику которой движется ортоцентр: $y = \frac{b-x}{f(x)}x$, где f – функция, по графику которой движется подвижная вершина треугольника.

3. Центр описанной окружности движется по одной прямой, не зависящей от траектории подвижной вершины треугольника. Эта прямая является серединным перпендикуляром к неподвижной стороне треугольника.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность: задачи на нахождение геометрического места точек всегда представляют интерес, а путь к решению может быть очень долгим и сложным, данная работа помогает упростить подходы к решению таких задач.

Результаты данной работы можно использовать при решении задач на нахождение геометрического места точек, при доказательстве определённых геометрических фактов, а также для построения некоторых фигур.

Данная тема была выбрана в связи с тем, что задачи на геометрическое место точек – один из самых интересных типов геометрических задач. Каждая из них требует определённого подхода и творческого мышления, что и вызвало интерес к данной теме.

Замечательными точками треугольника это такие точки как: точка пересечения биссектрис, точка пересечения высот, точка пересечения медиан, точка пересечения серединных перпендикуляров. Также существуют другие замечательные точки. К таким точкам относятся:

Точка Жергонна — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон вписанной окружностью [1, с. 4].

Первая Точка Торричелли — точка треугольника, из которой все стороны видны под углом в 120°. Расстояние от точки Торричелли до вершин треугольника является наименьшим из возможных [4].

Центр Шпикера — точка пересечения радикальных осей трёх вневписанных окружностей треугольника [3].

Точка Аполлония —точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с описанной вокруг них [2].

Цель: исследовать зависимость траектории движения некоторых замечательных точек треугольника от траектории движения подвижной вершины треугольника.

Задачи:

- исследовать зависимость траектории движения центра масс от траектории движения подвижной вершины треугольника;
- исследовать зависимость траектории движения центра описанной около треугольника окружности от траектории движения подвижной вершины треугольника;
- исследовать зависимость траектории движения ортоцентра от траектории движения подвижной вершины треугольника.

Объект исследования: треугольник

Предмет исследования: некоторые замечательные точки треугольника

Методы исследования:

- анализ теоретического материала;
- синтез подходов к решению задачи;
- обобщение полученных результатов.

Эксперимент был проведён следующим образом: был рассмотрен треугольник, ABC, в нём была выбрана подвижная вершина (точка A). Далее её двигали по определённым траекториям и рассматривали, по каким траекториям движутся замечательные точки треугольника – точка пересечения медиан, высот, серединных перпендикуляров.

После проведения эксперимента было выдвинуто несколько гипотез:

- центр масс движется по траектории в три раза меньшей, чем траектория подвижной вершины и по одинаковой с траекторией точки A;
- центр описанной окружности, в независимости от траектории подвижной вершины треугольника, движется по серединному перпендикуляру к стороне с неподвижными вершинами;
- если подвижная вершина движется по прямой, проходящей через начало координат, то ортоцентр движется по прямой перпендикулярной данной. Если точка A движется по прямой, параллельной оси абсцисс, то ортоцентр движется по параболе.

ЗАВИСИМОСТЬ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА ОТ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ВЕРШИНЫ

Введём декартову систему координат.

Пусть одна из неподвижных вершин треугольника, точка C, расположена в начале координат. Тогда C(0;0). Пусть вторая неподвижная вершина, точка B, расположена в точке с координатами (b;0). Тогда B(b;0). Пусть координата третьей, подвижной, вершины треугольника, точки A (a; c) (рисунок 1).

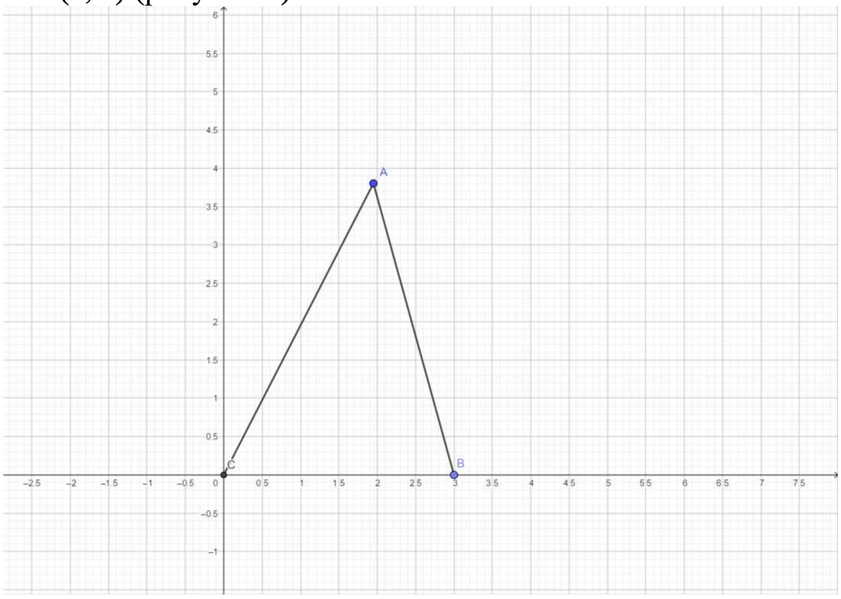

Рисунок 1.

Центр масс треугольника

Пусть точка пересечения медиан данного треугольника – M, тогда M по определению – центр масс данного треугольника. Тогда абсцисса точки M – $\frac{a+b+0}{3} = \frac{a+b}{3}$. Аналогично, ордината точки M – $\frac{0+0+c}{3} = \frac{c}{3}$. Тогда M $(\frac{a+b}{3}; \frac{c}{3})$. Новый чертёж будет выглядеть следующим образом (рисунок 2).

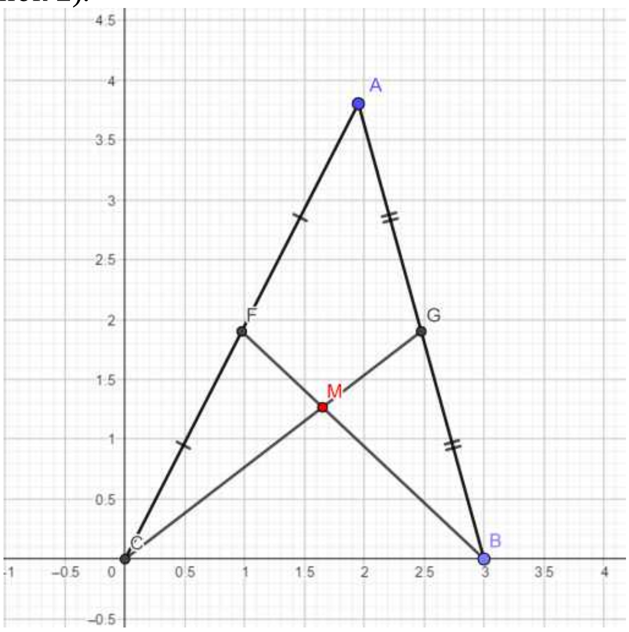

Рисунок 2

Пусть точка А движется по графику функции y = f(x). Тогда, если абсцисса точки А – a, то её ордината с равна f(a). Тогда центр масс, точка М ($\frac{a+b}{3}$;$\frac{f(a)}{3}$). Найдём такую функцию g(x), по графику которой движется точка М. Обозначим абсциссу точки М за t, тогда t = $\frac{a+b}{3}$. Откуда a = (3t-b), тогда f(a) = f(3t-b). Значит, ордината точки М: $\frac{f(a)}{3} = \frac{f(3t-b)}{3}$. Следовательно, координаты точки М (t;$\frac{f(3t-b)}{3}$). Значит, g(x) = $\frac{f(3x-b)}{3}$. Тогда точка М движется по графику функции g(x) = $\frac{f(3x-b)}{3}$, где f(x) – функция, по графику которой движется точка А. Откуда g(x) = $\frac{1}{3}$f(3(x-$\frac{b}{3}$)). Следовательно, график функции g может быть получен из графика функции f путём следующих геометрических преобразований:

1. Параллельный перенос на $\frac{b}{3}$ единицы вправо по оси O_x
2. Сжатие полученного графика в три раза вдоль оси O_x
3. Сжатие полученного графика в три раза вдоль оси O_y

Рассмотрим, как будет двигаться центр масс, если точка будет двигаться по прямой. Пусть точка А двигается по прямой y = kx+d, тогда точка А имеет координаты (a; ka+d). Тогда координаты точки М ($\frac{a+b}{3}$; $\frac{ka+d}{3}$). Тогда, из доказанного ранее, точка М движется по прямой y = $\frac{k(3x-b)+d}{3}$; y = $\frac{3kx-bk+d}{3}$; y=kx - $\frac{kb}{3} + \frac{d}{3}$. Действительно, если x = $\frac{a+b}{3}$, то y = k$\frac{a+b}{3}$ - $\frac{kb}{3} + \frac{d}{3}$=$\frac{ka+d}{3}$. Так как угловые коэффициенты равны, прямая по которой двигается точка А и прямая, по которой двигается точка М, параллельны. Так как ордината точки М в три раза меньше ординаты точки А, то отрезок, по которому движется точка М, в три раза короче отрезка, по которому движется точка А.

Пусть точка А движется по параболе y = rx^2+px+q, тогда в определённый момент времени координата точки А (a; ra^2+pa+q), а координата точки М ($\frac{a+b}{3}$; $\frac{ra^2+pa+q}{3}$). Тогда, исходя из уже доказанного, точка М движется по параболе y=3rx^2+(p-2br)x+$\frac{q+b^2r-pb}{3}$. Действительно, если x = $\frac{a+b}{3}$, то y = $\frac{ra^2+pa+q}{3}$.

Траектории движения центра масс по различным кривым представлены в приложение А рисунки А1-А7.

Вывод: гипотеза, представленная в начале, была доказана. Центр масс действительно движется по траектории в три раза меньшей чем траектория подвижной точки и повторяет её траекторию.

Ортоцентр треугольника

Проведём высоту СК и высоту АР, тогда по определению точка пересечения АР и СК – ортоцентр. Пусть это точка Н (рисунок 3).

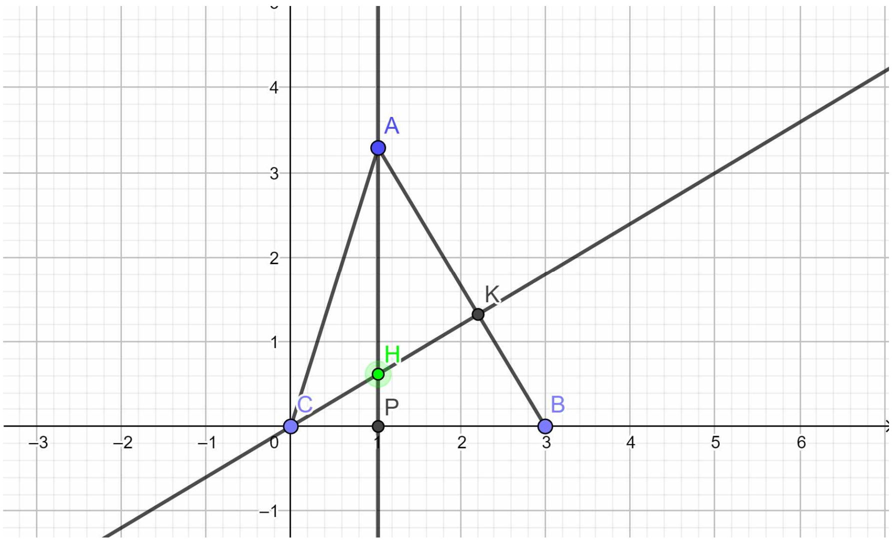

Рисунок 3

В некоторый момент времени уравнение прямой АР: x = a. Найдём уравнение прямой АВ:

$\frac{x-b}{a-b}=\frac{y-0}{c-0}$;

y = $\frac{c}{a-b}x$ - $\frac{cb}{a-b}$.

Так как прямая СК перпендикулярна прямой АВ, то произведение угловых коэффициентов этих прямых равно -1. Пусть уравнение прямой АВ в некоторый момент времени имеет вид y = kx+g, значит, k*$\frac{c}{a-b}$ = -1. Тогда

k = $\frac{b-a}{c}$. Так как пряма СК проходит через начало координат, то g = 0. Тогда уравнение прямой СК примет вид y = $\frac{b-a}{c}x$. Заметим, что абсциссы точек А и Н совпадают, так как эти точки лежат на одном перпендикуляре к оси абсцисс. Тогда ордината точки Н: y = $\frac{b-a}{c}a$. Откуда Н (a; $\frac{b-a}{c}a$).

Если с = $f(a)$, где y= f(x) – функция, по графику которой движется точка А, то ордината точки Н: $\frac{b-a}{f(a)}a$. Тогда траектория движения точки Н совпадает с графиком функции $y = \frac{b-x}{f(x)}x$.

Если точка А движется по прямой y=mx, то точка Н движется по прямой y = $\frac{b-a}{ma}a$; y = $-\frac{1}{m}a + \frac{b}{m}$. Отсюда произведение угловых коэффициентов этих прямых равно -1. Значит, эти прямые перпендикулярны (рисунок 4, рисунок 5).

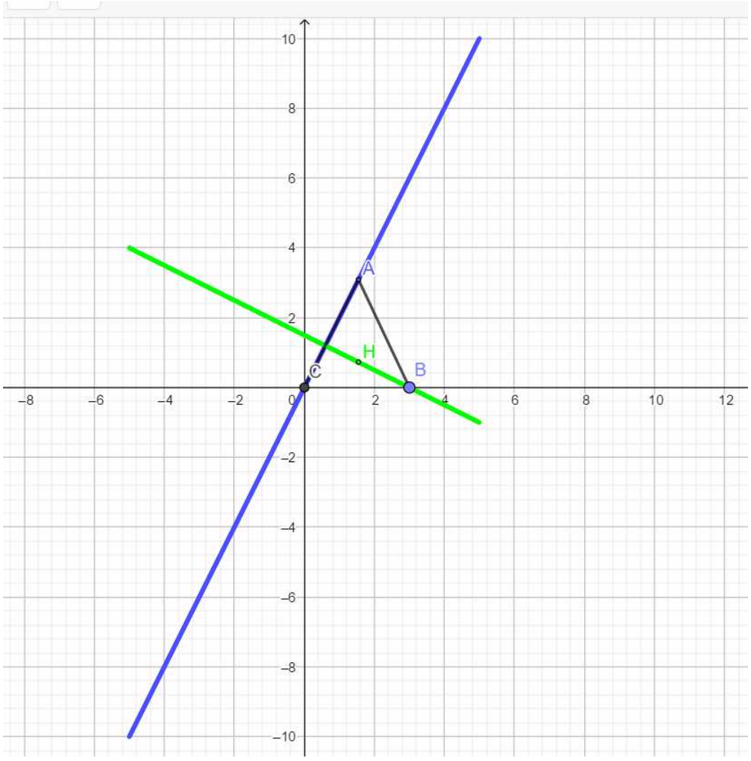

Рисунок 4. Траектория движения ортоцентра при движении точки по прямой y = 2x

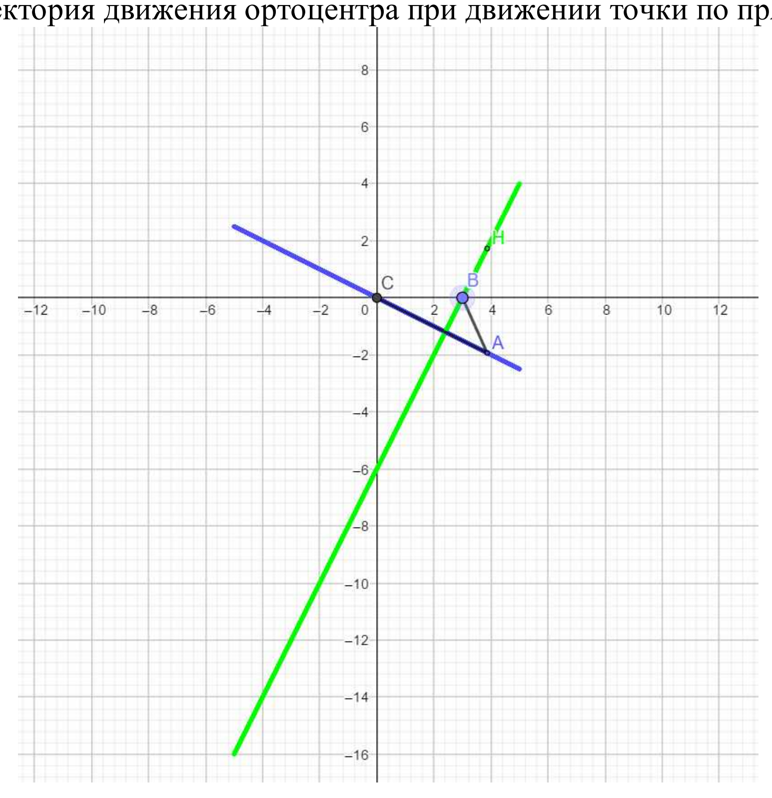

Рисунок 5. Траектория движения ортоцентра при движении точки по прямой $y = -\frac{1}{2}x$

Если точка А будет двигаться по кубической параболе $y = x^3$, то точка H будет двигаться по графику функции $y = \frac{b-x}{x^3}x$; $y = \frac{b}{x^2} - \frac{1}{x}$ (рисунок 6).

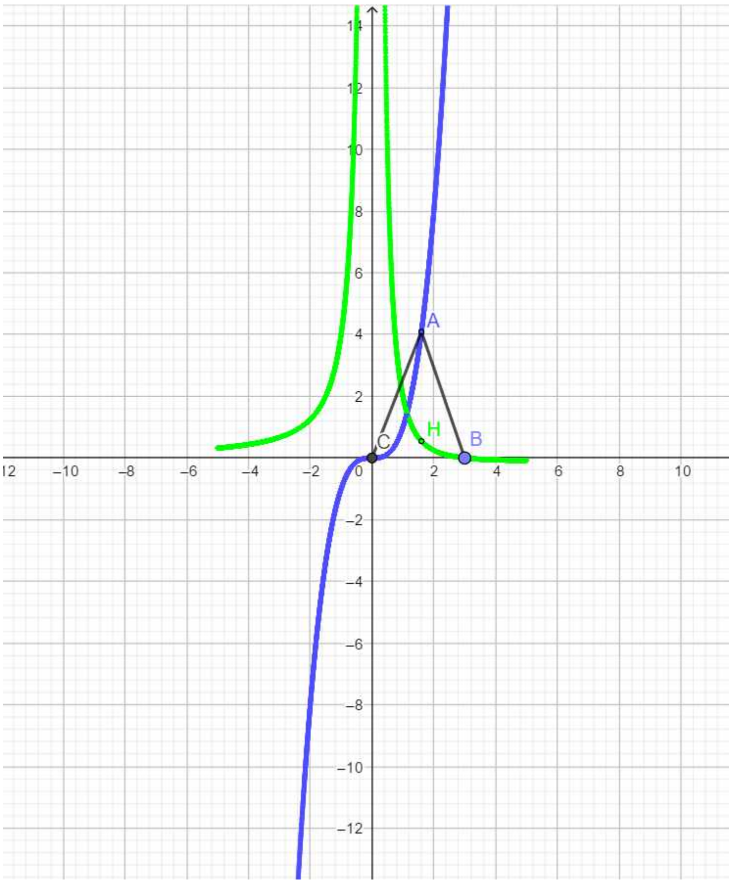

Рисунок 6. Траектория движения ортоцентра при движении точки по графику функции $y = x^3$

Следующие траектории можно получить путём аналогичных рассуждений (приложение А, рисунок А8-А10).

Вывод: общий вид функции, по графику которой движется ортоцентр: $y = \frac{b-x}{f(x)}x$, где f – функция, по графику которой движется подвижная вершина треугольника.

Центр описанной окружности треугольника

Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам данного треугольника (рисунок 7). Так как один из серединных перпендикуляров (серединный перпендикуляр к стороне ВС) неподвижен, то точка пересечения серединных перпендикуляров не будет менять свою абсциссу. Уравнение серединного перпендикуляра к отрезку ВС: x = $\frac{b}{2}$. Тогда абсцисса центра описанной окружности $\frac{b}{2}$.

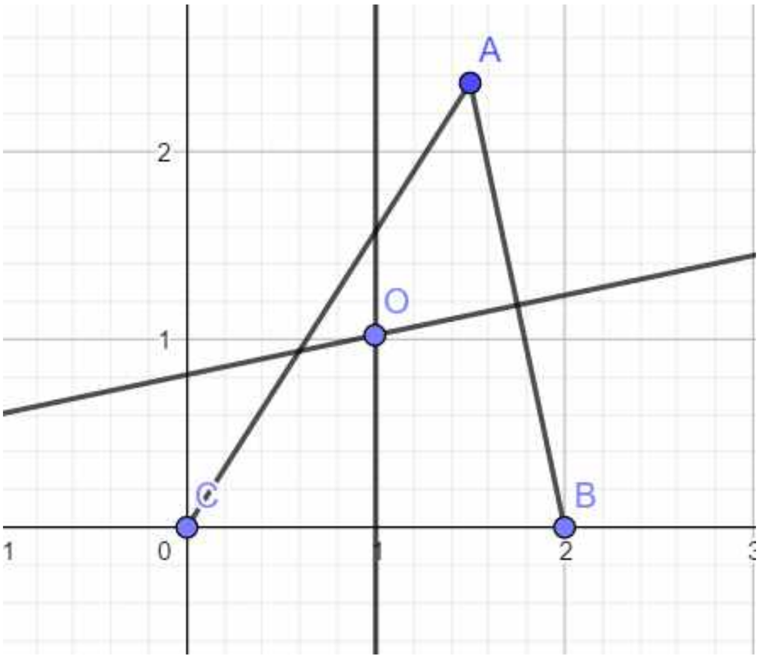

Рисунок 7

Вывод**:** действительно, как и предполагалось, центр описанной окружности движется по одной прямой, не зависящей от траектории точки А. Эта прямая является серединным перпендикуляром к неподвижной стороне треугольника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Центр масс треугольника, имеющего одну подвижную вершину, движется по траектории в три раза меньшей, чем траектория подвижной вершины и повторяет траекторию движения этой вершины. Если подвижная вершина движется по графику функции y = f(x), то центр масс движется по графику функции $g(x) = \frac{1}{3}f(3(x-\frac{b}{3}))$.

Общий вид функции, по графику которой движется ортоцентр: $y = \frac{b-x}{f(x)}x$, где f – функция, по графику которой движется подвижная вершина треугольника.

Центр описанной окружности движется по одной прямой, не зависящей от траектории подвижной вершины треугольника. Эта прямая является серединным перпендикуляром к неподвижной стороне треугольника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А.Г.,Мякишев. Элементы геометрии треугольника (Серия: «Библиотека «Математическое просвещение»») М.:МЦНМО,2002,-32с.:ил.
2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Точка_Аполлония
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Центр_Шпикера
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/Точки_Торричелли

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Траектория центра масс при движении вершины по прямой y = 2x

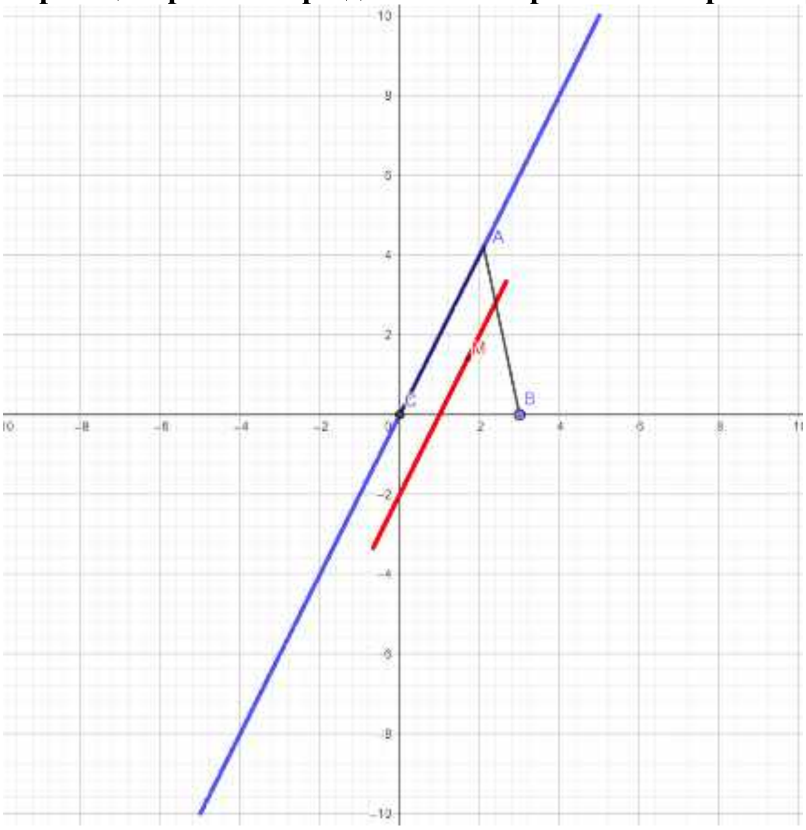

Рисунок А.1

Траектория центра масс при движении вершины по прямой y = $\frac{1}{2}$x

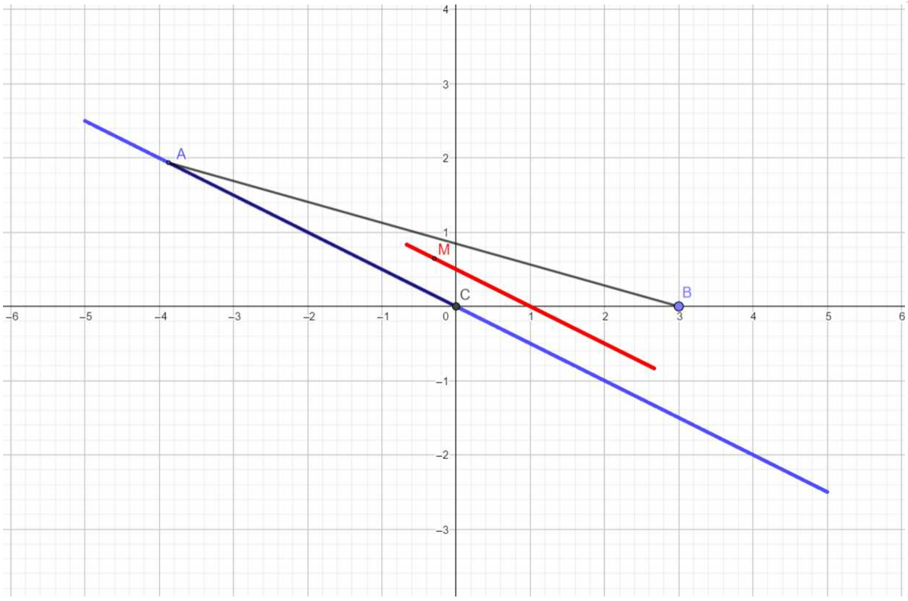

Рисунок А.2

Траектория центра масс при движении вершины по прямой y = 3x-2

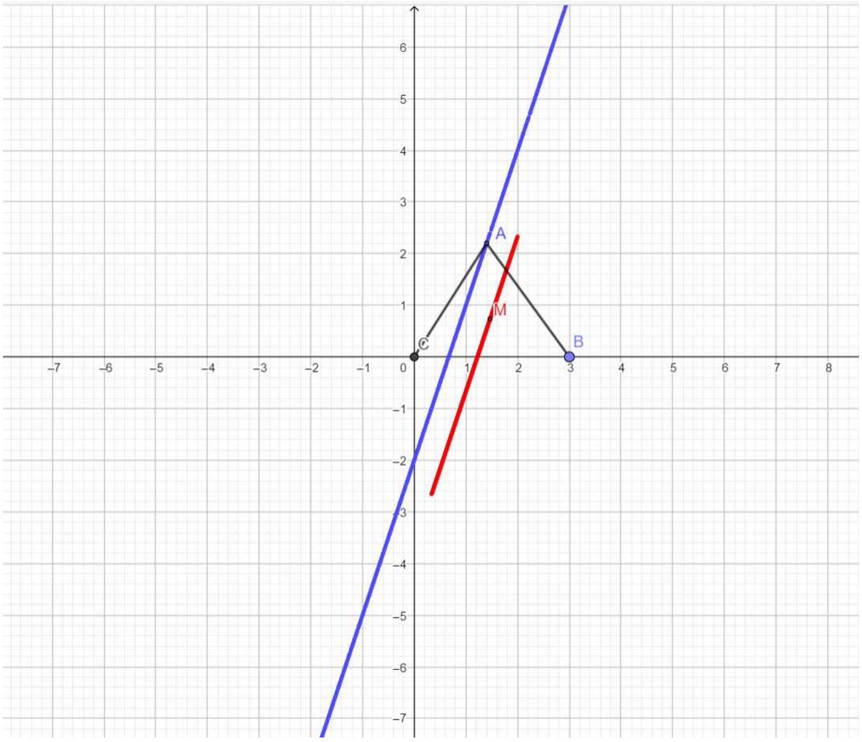

Рисунок А.3

Траектория центра масс при движении вершины по параболе y = x^2

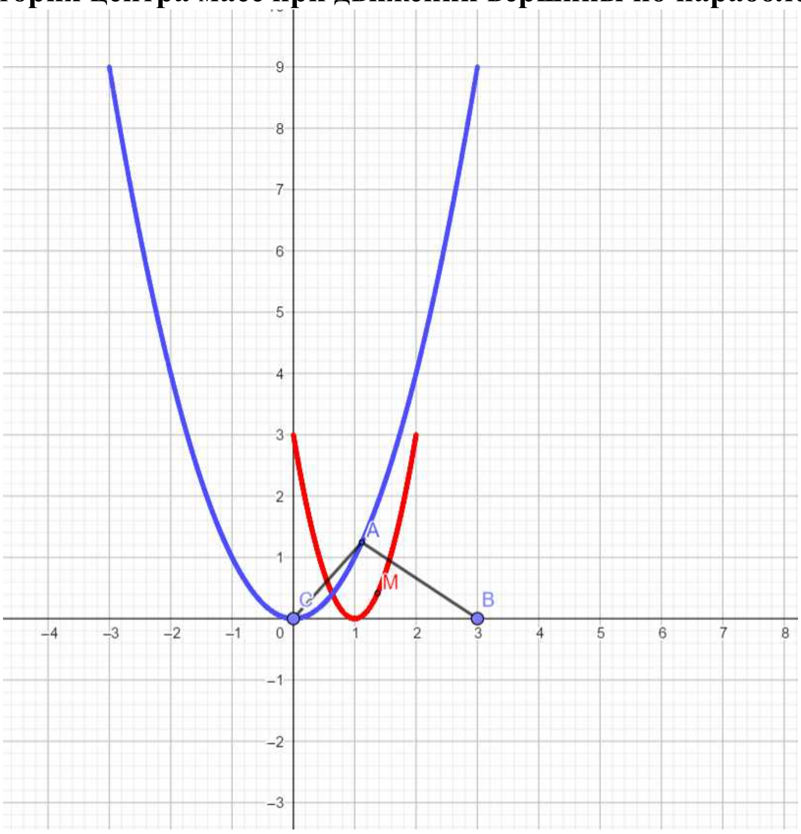

Рисунок А.4

Траектория центра масс при движении вершины по параболе y = $-x^2$

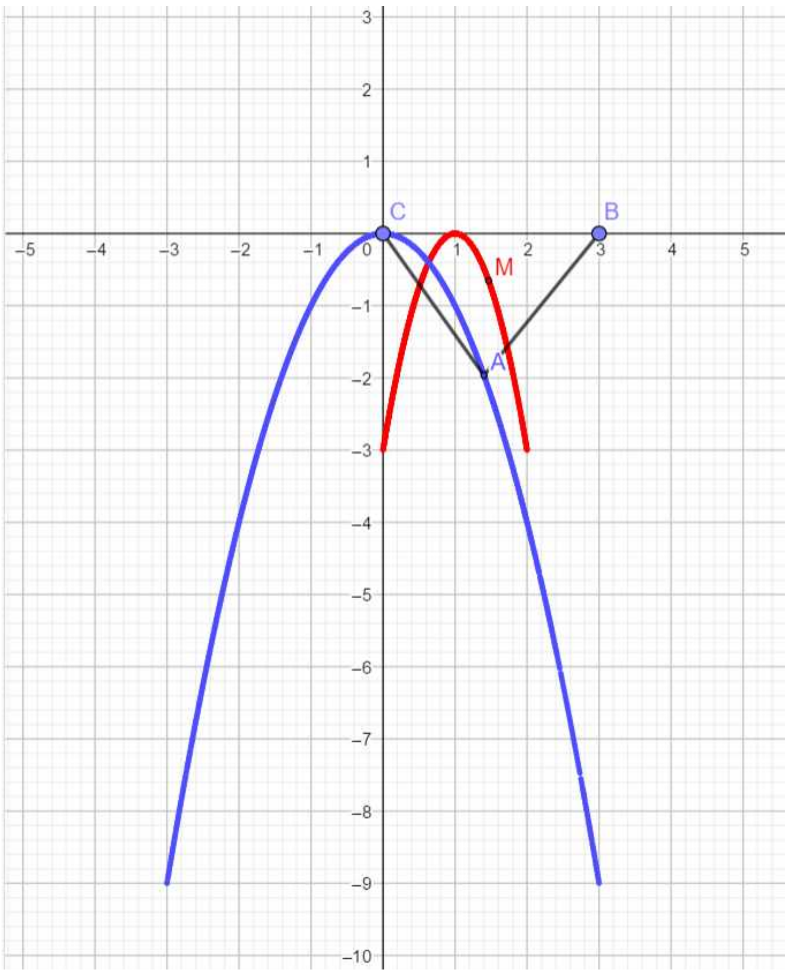

Рисунок А.5

Траектория центра масс при движении вершины по параболе $y = x^2+x-2$

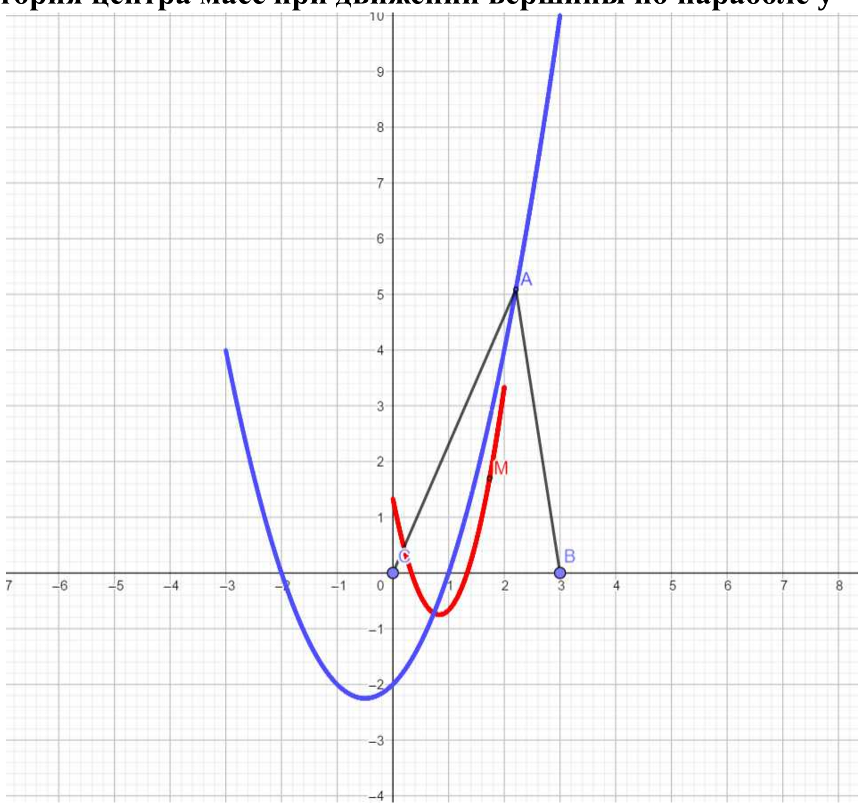

Рисунок А.6

Траектория движения ортоцентра при движении точки по графику функции y = x^2

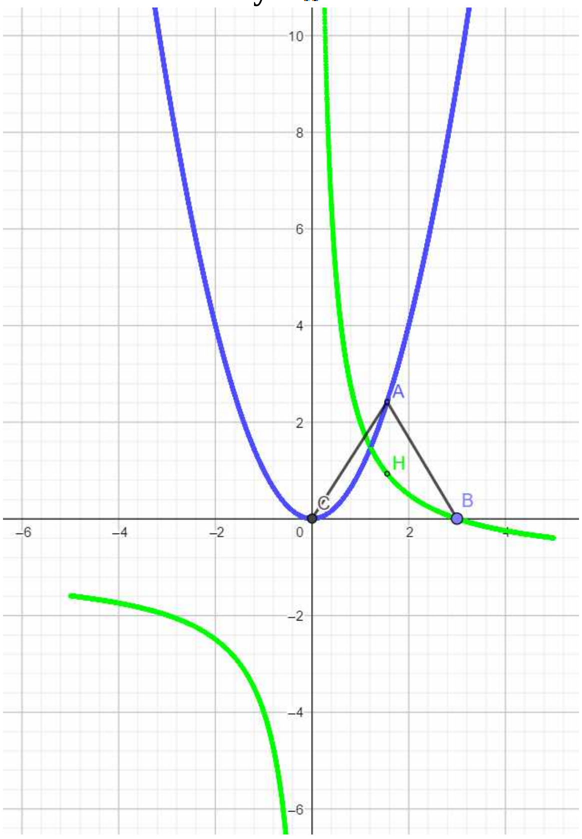

Рисунок А.7

Траектория движения ортоцентра при движении точки по графику функции y =$\frac{1}{x}$

Рисунок А.8

Траектория движения ортоцентра при движении точки по графику функции y =2^x

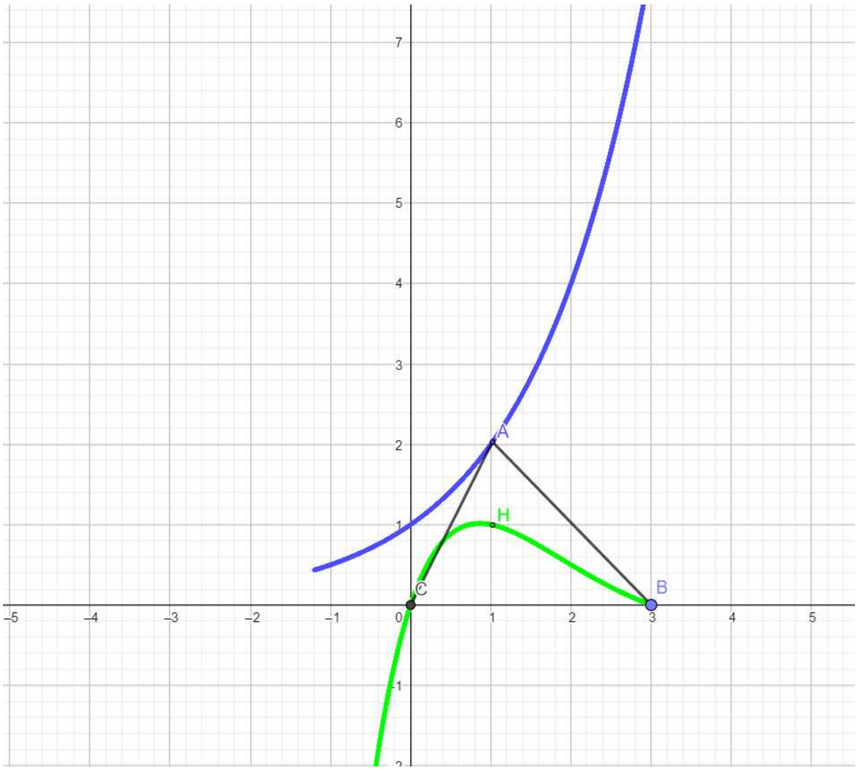

Рисунок А.9

Траектория движения ортоцентра при движении точки по графику функции y =sin x

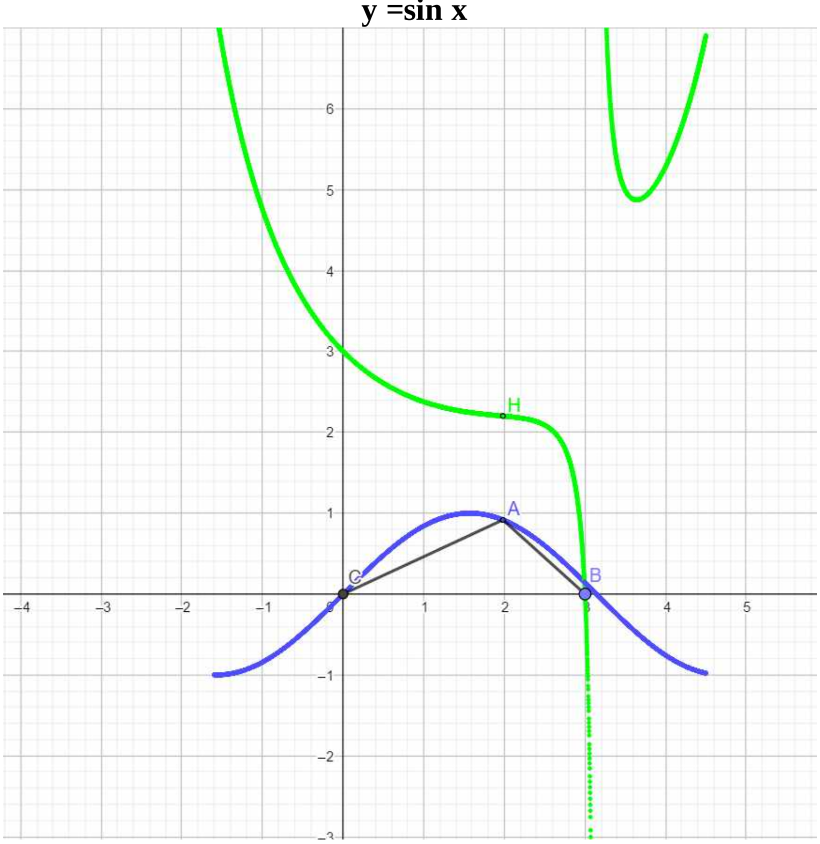

Рисунок А.10