XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс научно-исследовательских работ учащихся средних, средних специальных учебных заведений и студентов вузов «От Альфа к Омеге…» (с международным участием)
Секция 1. Алгебра, геометрия и математический
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Средняя школа № 2 г. Ляховичи»

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОПОРЦИЙ И СВОЙСТВА РЯДА РАВНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Рахманец Максим Юрьевич,

учащаяся 10 «А» класса

Тутина Нина Сергеевна,

учитель математики

ГУО «СШ № 2 г. Ляховичи»,

высшая кв. категория учителя математики

Ляховичи, 2021

РЕШЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОПОРЦИЙ И СВОЙСТВА РЯДА РАВНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М. Ю. Рахманец
ГУО «Средняя школа № 2 г. Ляховичи», 10 «А» класс,
Ляховичи, Беларусь

Научный руководитель – Н. С. Тутина, учитель математики ГУО «СШ № 2 г. Ляховичи», высшая кв. категория учителя математики.

Работа 20 с., 4 ч., 0 рис., 0 табл., 8 источников, 2 прил.

Ключевые слова: производные пропорции, свойства ряда.

Исследовательская работа актуальна на данном этапе, так как математический аппарат позволяет осмысленно понять суть доказательства некоторых теорем, и, безусловно, формирует вычислительную культуру учащихся.

Цель работы: Доказать две важные теоремы о пропорциях и показать, как можно ими пользоваться при решении алгебраических и геометрических задач.

Задачи:

1. Изучить понятие производной пропорции и ряда равных отношений.
2. Показать на примерах, как используются теоремы о производной пропорции и ряде равных отношений при решении алгебраических и геометрических задач.
3. Показать эффективность применения старинного способа решения задач на сплавление и смешивание.

Актуальность работы заключается в том, что использование новых знаний позволяет успешно решать олимпиадные задачи, конкурсные задачи, уравнения повышенной сложности. Полученные знания необходимы при решении задач централизованного тестирования по математике, сдаче экзаменов.

Выбор темы исследования позволяет расширить понятие пропорции и производных пропорций, выходя за рамки школьной программы.

Автор ставит своей целью дополнить уже известные свойства пропорций и показать, как они применяются при решении уравнений и систем уравнений, а также геометрических задач.

Также автор рассматривает старинный способ решения задач на сплавление разных материалов и смешивание разных жидкостей. Для реализации данной цели доказаны две важные теоремы, изучена дополнительная литература, изучен алгоритм решения алгебраических задач на смешивание и сплавы

Данная работа представляет собой результат исследовательской деятельности ученика 10 класса по математике.

Практическая и теоретическая значимость работы исследования может представить ценность для учащихся, педагогов учреждений образования, студентов и школьников, интересующихся математикой, химией.

Материал работы может быть использован при подготовке к ЦТ по математике, при проведении факультативных занятий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

> Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.
>
> Д. Пойа

Еще в древности одним из важнейших достоинств человека считали владение математическими знаниями. В Индии, например, только тот юноша считался подготовленным к жизни, кто овладевал искусством решения задач, физических упражнений и стихосложений.

Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления, проявляющегося в определённых умственных навыках, которые заключаются в обобщении, конкретизации, анализе, синтезе. Для реализации этих задач математического образования большую роль играют нестандартные задачи, при решении которых развивается творческое и логическое мышление, формируются способности нестандартно мыслить, проявляется самостоятельность, умение применять способы решения задачи в практической деятельности, использовать полученные знания и умения в решении прикладных и практических задач.

Решение уравнений, систем уравнений один из важных разделов в математике.

В связи с подготовкой к сдаче выпускного школьного и вступительного экзаменов по математике особую важность приобретают систематизация и обобщение методов решения уравнений. Значительное место в школьном курсе математики занимают уравнения и системы уравнений. Моё внимание привлёк метод решения уравнений и систем уравнений с использованием теорем о производных пропорциях. В школьном курсе на изучение темы «Пропорция и свойства пропорции» отводится немного времени.

Однако при решении некоторых задач необходимо знать свойства ряда равных отношений и уметь составлять производные пропорции. Поэтому я решила взять в качестве темы научно-исследовательской работы «Применение производных пропорций и свойства ряда равных отношений при решении алгебраических и геометрических задач».

Цель работы: Доказать две важные теоремы о пропорциях и показать, как можно ими пользоваться при решении алгебраических и геометрических задач.

Задачи:

1. Изучить понятие производной пропорции и ряда равных отношений.
2. Показать на примерах как используются теоремы о производной пропорции и ряде равных отношений при решении уравнений и систем уравнений.
3. Показать эффективность применения производных пропорций и свойств ряда равных отношений при решении многих геометрических задач.

Гипотеза: Предполагаю, что из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ можно получить производные правильные пропорции, которые используются при решении алгебраических и геометрических задач. Также существует алгоритм решения задач на сплавление и смешивание.

Актуальность работы заключается в том, что использование новых знаний позволяет успешно решать олимпиадные задачи, конкурсные задачи, уравнения повышенной сложности. Полученные знания необходимы при решении задач централизованного тестирования по математике.

Методы исследования:

- анализ литературы;
- математическая обработка данных;
- обобщение.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Пропорция. Производная пропорция

Пропорцией называется равенство двух отношений или верное равенство вида

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \tag{1.1}$$

где числа a, b, c, d не равны нулю.

Пропорцию можно записать иначе:

$$a : b \;=\; c : d \tag{1.2}$$

Записи (1.1) и (1.2) читаются так: ***a*** относится к ***b*****,** как ***c*** относится к ***d*****.** Числа ***a*** ***и*** ***d*** называются крайними членами пропорции, а числа ***b и c*** — ее средними членами.

Теорема 1. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

Доказательство. Умножая обе части данного равенства (1.1) на *bd*,получим

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$

или *ad=bc,* что и требовалось доказать.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 2. Если произведение двух чисел a и d равно произведению двух других чисел b и c ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$), то из этих чисел можно составить пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Доказательство. Пусть ad=bc. Разделив обе части этого равенства на bd, получим

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

Для того, чтобы сформулировать две следующие важные теоремы о пропорциях, изучим понятие линейной комбинации чисел.

Пусть a1, a2,…,an — произвольные действительные числа. Линейной комбинацией этих чисел с действительными коэффициентами x1, x2, ..., xп называется выражение вида

$$x_1\, a_1 + x_2\, a_2 + x_3\, a_3 + ... + x_п\, a_п\,. \tag{1.3}$$

Теорема 3. (О производной пропорции)

Если дана пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то любые две линейные комбинации членов ее первого отношения относятся одна к другой так, как такие же линейные комбинации членов ее второго отношения. Другими словами, из того, что верна пропорция (1.1), следует, что для любых действительных чисел т, п, р и q таких, что $pa+qb \neq 0$ и $pc+qd \neq 0$ выполняется равенство

$$\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd}. \tag{1.4}$$

Равенство (1.4) называется производной пропорцией от пропорции (1.1) или просто производной пропорцией.

Доказательство. Из пропорции (1.1) следует, что $a = \frac{bc}{d}$. Подставив это выражение вместо ~~*a*~~ в левую часть равенства (1.4), получим

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{m\frac{bc}{d}+nb}{p\frac{bc}{d}+qb}=\frac{mbc+nbd}{pbc+qbd}=\frac{b(mc+nd)}{b(pc+qd}=\frac{mc+nd}{pc+qd},$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно заметить, что формула (1.4) определяет бесконечно много различных пропорций. Положив, например, в ней:

1) m=1, n=1,p=0, q= 1 получим: $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$,
2) m=1, n=1,p=1, q=0 получим: $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$,
3) m=1, n=(-1), p=0,q=1 получим: $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,
4) m= 1, n=(-1),p=1, q=0 получим: $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$,
5) m= 1, n=1,p=1, q=(-1) получим: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

1.2. Теорема о ряде равных отношений

Если есть n равных отношений, то любая линейная комбинация их предыдущих членов относится к такой же линейной комбинации их последующих членов, как любой предыдущий член к своему последующему. Другими словами, из того, что верны равенства

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \tag{1.5}$$

следует, что верна последовательность равенств

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=t$, тогда$a_1=b_1t$, $a_2=b_2t$, …, $a_n=b_nt$ Подставив эти выражения для a1, a2,…,an в левую часть равенства (1.6), получим

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}=\frac{k_1b_1t+k_2b_2t+\cdots+k_nb_nt}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}=\frac{(k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n)t}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}=t=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=$$
$$=\frac{a_n}{b_n},$$

что и требовалось доказать.

2 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Покажем теперь, как можно использовать теоремы о производной пропорции и ряде равных отношений при решении уравнений.

Пример 1. Решить уравнение (12x-37)(12x-29)=(12x-57)(12x-49).

Решение**.** Составим пропорцию $\frac{12x-37}{12x-57} = \frac{12x-49}{12x-29}$ откуда, пользуясь пятой

производной пропорцией, получим $\frac{24x-94}{20} = \frac{24x-78}{-20}$, т.е. 24x-94=-24x+78 или 48x=172, x=$\frac{43}{12}$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{67}{23x-59} = \frac{57}{23x-49}$

Решение. Поменяв местами крайние члены пропорции, получим $\frac{23x-49}{23x-59} = \frac{57}{67}$. После применения четвертой производной пропорции имеем:

$\frac{10}{23x-49} = \frac{-10}{57}$, откуда 23x-49= -57; 23x= -8; x= $-\frac{8}{23}$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{x-5}{x-7} + \frac{x-7}{x-9} = 2$.

Решение. Перенесем вторую дробь направо и получим, что $\frac{x-5}{x-7} = 2 - \frac{x-7}{x-9}$ или $\frac{x-5}{x-7} = \frac{x-11}{x-9}$

Применив третью производную пропорцию, получаем, что $\frac{2}{x-7} = \frac{-2}{x-9}$ откуда x-9=-x+7; 2x=16; x=8.

Пример 4. Найти произведение целых корней уравнения

$$\frac{3x^2 - 13x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4x^2 - 13x + 1}{2x^2 - 5}$$

Используя пропорцию $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, получим:

$$\frac{2x^2 - 13x + 6}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 13x + 6}{2x^2 - 5}$$

Равенство выполняется, если

$2x^2 - 13x + 6 = 0$ *или* $x^2 - 1 = 2x^2 - 5$,

Корнями первого уравнения являются числа 6 и 0,5

Корнями второго уравнения являются числа 2 и -2. Произведение целых корней уравнения равняется 2$\cdot(-2) \cdot 6 = -24$.

Это задание было на ЦТ по математике.

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{5}, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

Решение. Применив теорему о производной пропорции к первому уравнению системы, получим, что $\frac{2x+3y}{y} = \frac{2\cdot3+3\cdot5}{5}$ или, в силу второго уравнения системы $\frac{3}{y} = \frac{21}{5}$. Откуда y=$\frac{5}{7}$. Тогда из первого уравнения x=$\frac{3}{7}$.

Последний пример можно решать и с помощью теоремы о ряде равных отношений. Запишем первое уравнение системы в виде $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ и применим к полученному уравнению теорему 4, взяв в качестве коэффициентов линейной комбинации предыдущих членов коэффициенты при неизвестных x и y из второго уравнения системы. Тогда получим, что $\frac{2x+3y}{2\cdot3+3\cdot5} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. Учитывая, что 2x+3y=3, получим, что $\frac{3}{21} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5}$, откуда x = $\frac{3}{7}$,y = $\frac{5}{7}$.

Пример 6. Решить систему $\begin{cases}111x - 166y = 1,\\ 107x - 159y = 3.\end{cases}$

Решение. Вычитая из второго уравнения системы первое, умноженное на 3, последовательно получим

$$-226x+339y=0;\ 2x=3y;\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$$

Применяя к последнему равенству теорему о ряде равных отношений, получаем

$$\frac{111x - 166y}{111\cdot3 - 166\cdot2} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$$

В силу того, что 111x-166y=1, имеем $\frac{1}{1} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, откуда $x=3;y=2$.

Пример 7. Решите систему $\begin{cases}\mathbf{x + y + z = 48},\\ \mathbf{\frac{x}{z} = \frac{2}{3}}\\ \mathbf{\frac{y}{z} = \frac{1}{3}}.\end{cases}$

Решение. Из двух последних уравнений следует, что $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$

Применяя теорему о ряде равных отношений и учитывая первое уравнение системы, получаем

$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3} == \frac{x+y+z}{2+1+3} = \frac{48}{6}$,

откуда x=16, y=8, z=24.

Пример 8. Решить систему $\begin{cases}3x - 2y + 2z = 76,\\ 5x - 3y = 0,\\ 7x - 4z = 0.\end{cases}$

Решение. Из двух последних уравнений следует, что $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ $и$ $\frac{x}{4} = \frac{z}{7}$,т. е. $\frac{x}{12} = \frac{y}{20} = \frac{z}{21}$. Применим к последней цепочке равенств теорему о ряде равных отношений, взяв в качестве коэффициентов линейной комбинации предыдущих членов коэффициенты при неизвестных из первого уравнения

системы: $\frac{x}{12} = \frac{y}{20} = \frac{z}{21} = \frac{3x-2y+2z}{3\cdot12-2\cdot20+2\cdot21} = \frac{76}{38}$=2, откуда x=24, y=40, z=42.

Задача**.** За 19 тетрадей и 17 ручек заплатили 19 рублей 50 копеек. Сколько стоит ручка и сколько стоит одна тетрадь, если стоимость 4 ручек такая же, как и 7 тетрадей.

Решение. Пусть одна ручка стоит x копеек, тогда 4 ручки – 4 x копеек.Одна тетрадь стоит – y копеек, 7 тетрадей – 7y копеек. По условию задачи составим систему уравнений и решим её.

$$\begin{cases}17x + 19y = 1950\\ 4x = 7y\end{cases}$$

Из последнего уравнения следует $\frac{x}{7} = \frac{y}{4}$. Применим теорему о ряде равных отношений, взяв в качестве коэффициентов линейной комбинации предыдущих членов коэффициенты при неизвестных из первого уравнения системы:

$\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{17x+19y}{7 \cdot 17+4 \cdot 19} = \frac{1950}{195} = 10$, откуда x = 70, y= 40.

Значит, тетрадь стоит 40 копеек, ручка – 70 копеек.

Ответ: 40 копеек, 70 копеек.

Такая задача была в части «А» на ЦТ. Задачи, подобные данной, встречаются и в сборнике экзаменационных заданий за базовую школу.

3 РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Особенно эффективно применение производных пропорций и свойства ряда равных отношений при решении многих геометрических задач, решение которых приводится к уравнению, выраженному в виде пропорции, или к цепочке равенств.

Задача 1. Доказать, что в любом треугольнике отношение его периметра к сумме синусов всех его углов равно двум радиусам описанной окружности.

Доказательство. По теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Применив к данной цепочке равенств теорему о ряде равных отношений, сразу получаем

$$\frac{a + b + c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = 2R$$

Задача 2**.** Доказать, что в любом треугольнике сумма величин, обратных его высотам, равна отношению периметра этого треугольника к его удвоенной площади.

Доказательство. Согласно формуле площади треугольника

$$2S = a\cdot h_a = b\cdot h_b = c\cdot h_c = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

По теореме о ряде равных отношений имеем, что $\frac{a+b+c}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = 2S$ или $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S}$, что и требовалось доказать.

Задача 3**.** Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо равенство:

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, где a и b – длины катетов, h – длина высоты, опущенной из вершины прямого угла.

Доказательство:

1. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot h = \frac{1}{2}h\sqrt{a^2+b^2}$, (1) кроме того $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$ (2).

2.Сравнив (1.1) и (1.2) получим $h\sqrt{a^2+b^2} = ab \Leftrightarrow h^2(a^2+b^2) = (ab)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Что и требовалось доказать.

Задача 4. Докажите, что для любого тетраэдра с прямым трехгранным углом справедливо равенство: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где a,b,c - длины взаимно перпендикулярных ребер, h – длина высоты, опущенной из вершины прямого трехгранного угла.

Доказательство: Объем тетраэдра $DABC$ находится по формулам:

$v = \frac{1}{6}\cdot abc(1),\ v = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h$. Поскольку $S_{ABC} = \sqrt{S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2}$, *то*

$v = \frac{1}{3}\cdot h\sqrt{S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2}(2) \Rightarrow$ Приравняв (1) и (2) получим:

$$\frac{1}{6}\cdot abc = \frac{1}{3}\cdot h\sqrt{S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2} \Leftrightarrow (abc)^2 = h^2\cdot(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Задача 5. Докажите, что для треугольника, описанного вокруг окружности, справедливо равенство: $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, где h_1, h_2, h_3 - высоты треугольника.

Доказательство:

Периметр треугольника: $P = a + b + c$,

но $P = \dfrac{2S}{r}, a = \dfrac{2S}{h_1}, b = \dfrac{2S}{h_2}, c = \dfrac{2S}{h_3} \Rightarrow \dfrac{2S}{r} = \dfrac{2S}{h_1} + \dfrac{2S}{h_2} + \dfrac{2S}{h_3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3}$.

Что и требовалось доказать.

Задача 6. Докажите, что если d_1, d_2, d_3 - расстояния от произвольного пункта внутри треугольника до его сторон; h_1, h_2, h_3 - соответствующие высоты, справедливо равенство: $\dfrac{d_1}{h_1} + \dfrac{d_2}{h_2} + \dfrac{d_3}{h_3} = 1$.

Задача 7. Докажите, что для тетраэдра, описанного вокруг сферы, справедливо равенство: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_4}$, где h_1, h_2, h_3, h_4- высоты тетраэдра.

Задача 8. Докажите, что если d_1, d_2, d_3, d_4 - расстояния от произвольного

пункта внутри тетраэдра до его граней, а h_1, h_2, h_3, h_4 - соответствующие высоты, то выполняется равенство: $\dfrac{d_1}{h_1} + \dfrac{d_2}{h_2} + \dfrac{d_3}{h_3} + \dfrac{d_4}{h_4} = 1$.

4 СТАРИННЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СМЕШИВАНИЕ (СПЛАВЛЕНИЕ)

Один из типов текстовых задач на составление уравнений и систем уравнений — задачи на сплавы, смеси и растворы. Эти задачи относятся к традиционным арифметическим и алгебраическим задачам, при решении которых учащиеся испытывают затруднения. Когда-то они имели исключительно практическое значение, но со временем потеряли свою практическую актуальность и сейчас используются в процессе обучения как средство развития обучаемых, а на конкурсных экзаменах — как средство проверки мыслительных способностей абитуриентов.

Для решения задач на смеси и сплавы нужно уметь рассуждать и уметь решать задачи на пропорции и проценты, на составление уравнений и их систем. Отметим, что задачи на смеси и сплавы охватывают большой круг ситуаций: смешение товаров разной цены, жидкостей с различным содержанием соли, кислот разной концентрации, сплавление металлов с различным содержанием некоторого металла. Словом, это набор классических задач, имеющих общие подходы к их решению.

В задачах на эту тематику делаются следующие допущения:

1. Все рассматриваемые смеси (растворы, сплавы) однородны.
2. Не делается различия между литром как единицей вместимости и литром как единицей массы.

Предложенный способ позволяет легче запомнить последовательность действий при решении задач на смешивание и добиться автоматизма при выполнении самих действий. В условиях, когда приходилось решать много подобных задач, этот способ экономит время. Старинный способ решения задач на смешивание (сплавление) нескольких веществ всегда позволяет получить правильный ответ. Суть его заключается в следующем:

Пусть сплавляется x грамм слитка с a% содержанием меди, и y грамм с в% содержанием меди. При этом получается слиток с c% содержанием меди. Пусть для определённости a<c<в. Так как в полученном (x+y) грамм сплаве содержится c% меди, т.е. (x+y)·c/100 г., то получаем следующее уравнение:

$\frac{a}{100}\times x+\frac{в}{100}\times y=(x+y)\times\frac{c}{100}$. Отсюда получаем $\frac{x}{y}=\frac{в-c}{c-a}$. Именно это отношение мы получим, если запишем условие задачи следующим образом:

a в-c
c
в c-a.

Рассмотрим решение следующей задачи:

Задача 1. Имеется три слитка. Первый весом 5 килограмм, второй – 3 килограмма. Каждый из них содержит 30% меди. Если первый сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если сплавить второй с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найти массу третьего слитка и процентное содержание меди в нём.

Друг под другом записываем процентное содержание меди в первом и третьем слитках. Слева от них и примерно посередине - содержание меди в их сплаве. Рассмотрим пары 56 и 30, 56 и y. В каждой паре из большего числа вычтем меньшее, и результат запишем в конце соответствующей чёрточки. Аналогично составим схему для второго и третьего слитков.

30 y-56 5 кг
56
y 26 x кг

30 y-60 3 кг

60

y 30 x кг

Составляем систему уравнений согласно составленным схемам.

$$\begin{cases} \dfrac{y-56}{26}=\dfrac{5}{x} \\ \dfrac{y-60}{30}=\dfrac{3}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{90}{y-60} \\ \dfrac{y-56}{26}=\dfrac{y-60}{18} \end{cases}$$

После решения данной системы получаем x=10, y=69%;

Ответ: 10 кг, 69%

Задача 2. Имеются три сосуда, в которых содержится соответственно 10, 30 и 5 л растворов соляной кислоты. Процентное содержание кислоты во втором сосуде на 10 % больше, чем в первом, а содержание кислоты в третьем сосуде равно 40 %. Половину раствора из второго сосуда перелили в первый, а другую половину — в третий. После этого процентное содержание кислоты в первом и третьем сосудах оказалось одинаковым. Сколько процентов кислоты содержал вначале первый раствор?

В 1сосуде 10 литров x%-процентное содержание кислоты;

Во 2 сосуде 30 литров (x+10)%- процентное содержание кислоты;

В 3 сосуде 5 литров 40%- процентное содержание кислоты;

y%- процентное содержание кислоты после переливания.

	x+10	y-x	15 л.	$x<y<x+10$
y				
	x	x+10-y	10 л	$\frac{y-x}{x+10-y}=\frac{15}{10}$

	x+10	y-40	15 л.	$40<y<x+10$
y				
	40	x+10-y	5 л.	$\frac{y-40}{x+10-y}=\frac{15}{5}$

$\begin{cases} \frac{y-x}{x+10-y}=\frac{15}{10} \\ \frac{y-40}{x+10-y}=\frac{15}{5} \end{cases}$. Решая систему уравнений, получим x=46, y=52.

Ответ: 46%

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решать уравнения, системы уравнений должен уметь каждый учащийся.

Эти навыки необходимы для решения многих практических задач.

Проработав несколько учебных пособий, пособий для поступающих, математических справочников, мы убедились, что существуют некоторые теоремы, которые позволяют легко и быстро решать алгебраические и геометрические задачи.

Особое внимание мы уделили решению задач на сплавление и смешивание старинным способом. Учитывая, что решение задач такого рода вызывает трудности у учеников, мы показали этот способ, при помощи которого можно легко справиться с задачами, не делая ошибок.

Считаю, что дана тема имеет перспективы развития в следующих направлениях:

- Применение изученных теорем позволяет легко решать некоторые геометрические задачи, а также уравнения и системы.
- Старинный способ решения задач на сплавление и смешивание экономит время, всегда позволяет получить правильный ответ.

Материал работы может быть использован при подготовке к ЦТ по математике, при проведении факультативных занятий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. К.А. Иванов Электронный тренажёр по математике, физике, химии. Производная пропорция и свойство ряда равных отношений..-Минск: Красико-принт, 2005 г.
2. О.И.Тавгень, А.И. Тавгень Математика в задачах. Теория и методы решений.. -Минск: Аверсэв, 2005 г.
3. И. В. Пархимович Математика для поступающих. – Минск: Вышэйшая школа, 1998 г.
4. . Г.Г. Мамонтова. Математика. Подготовка к тестированию – Минск: Новое знание, 2005 г.
5. И. Н. Петрова. Проценты на все случаи жизни. – Челябинск: Южно-Уральское книжное изд-во,1996 г.
6. Ю. В. Шарапов. Задачи на смеси, сплавы, раствор. -Матэматыка. Праблемы выкладання: №3, 2008 г.
7. http://ru.wikipedia.org/wiki/Пропорция_(математика)
8. Сборник заданий для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на другой ступени общего среднего образования Минск национальный институт образования 2016.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задачи на смеси и сплавы, выписанные со сборника заданий для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на 2 ступени общего среднего образования, которые можно решить старинным способом, а также применяя производные пропорций

Вариант 7-8 №8

а) Сколько воды надо добавить к 0,6 л раствора, содержащего

40% поваренной соли, чтобы получить 12-процентный раствор этой соли?

б) а) Сколько воды надо добавить к 0,1 л раствора, содержащего

40% уксусной кислоты, чтобы получить 9-процентный раствор этой кислоты?

Вариант 33-34 №8

а) Найдите, в каком отношении следует смешать 6 – процентный и 30 – процентный растворы соли, чтобы получить 12 – процентный раствор.

б) Найдите, в каком отношении следует смешать 8 – процентный и 40 – процентный растворы соли, чтобы получить 16 – процентный раствор.

Вариант 73-74 №9

а) После того как смешали 50 –процентный и 20- процентный растворы кислоты, получили 900 г 30 – процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора смешали?

б) После того как смешали 60 –процентный и 30- процентный растворы кислоты, получили 600 г 40 – процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора смешали?

Вариант 81-82 №8

а) Из пункта А в пункт В отправился пассажирский поезд, в то же время из пункта В в пункт А отправился грузовой поезд. Скорость каждого из них на всем участке движения постоянна. Через 2 ч после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 280 км. Пассажирский поезд прибыл в пункт В через 9 ч, а грузовой – в пункт А через 16 часов. Найдите скорость пассажирского поезда.

Б Из пункта А в пункт В отправился пассажирский поезд, в то же время из пункта В в пункт А отправился грузовой поезд. Скорость каждого из них на всем участке движения постоянна. Через 2 ч после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 300 км. Пассажирский поезд прибыл в пункт В через 4 ч, а грузовой – в пункт А через 11 часов. Найдите скорость грузового поезда.

Вариант 87-88 №8

а) Если к сплаву меди и цинка добавить 20 г меди, то содержание меди в сплаве составить 70 %. Если к первоначальному сплаву добавить 70 г сплава, содержащего 40 % меди, то содержание меди составит 52 %. Найдите массу первоначального сплава.

б) Если к сплаву меди и цинка добавить 20 г меди, то содержание меди в сплаве составит 60 %. Если к первоначальному сплаву добавить 20 г сплава, содержащего 40 % меди, то содержание меди составит 48 %. Найдите массу первоначального сплава.

Вариант 143-144 №10

а) До просушки влажность зерна была 23%, а после просушки оказалось равной 12%. На сколько процентов убыло в массе зерно после просушки?

б) Влажность сырого льна была равна 45%, а после просушки оказалась равной 12%. На сколько процентов убыл в массе лен после просушки?

Вариант 153-154 №10

а) В раствор объёмом 10 л, содержащий 50% кислоты, доливают раствор, содержащий 20% такой же кислоты. Сколько можно долить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала не менее 30%, но не более 35% кислоты?

б) В раствор объёмом 5 л, содержащий 30% кислоты, доливают раствор, содержащий 70% такой же кислоты. Сколько можно долить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала не менее 60%, но не более 65% кислоты?

Задачи для подготовки к ЦТ, задачи ставленые самостоятельно

2. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный сплав содержал 40 % меди.

Ответ: 1,5 кг.

3. Кусок сплава меди с цинком массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60 % меди?

Ответ: 13,5 кг.

4. Один раствор содержит 20 % (по объёму) соляной кислоты, а второй — 70 % этой кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50%-ного раствора соляной кислоты?

Ответ: 40 л, 60 л.

5. Смешали 10%-ный и 25%-ный растворы соли и получили 3 кг 20%-ного раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано?

Ответ: 1 кг, 2 кг.

6. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием 30 % никеля?

Ответ: 40 т, 100 т.

7. Имеется 240 г 70%-ного раствора уксусной кислоты. Нужно получить 6%-ный раствор кислоты. Сколько граммов воды надо прибавить к имеющемуся раствору?

Ответ: 2560 г.

8. Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении 2 : 3, а другая —в отношении 3 : 7. По скольку вёдер нужно взять из каждой бочки, чтобы составить 12 вёдер смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении 3 : 5 ?

Ответ: 9 вёдер спирта и 3 ведра воды.

9. В двух различных сплавах железо и олово находятся в отношении 2 : 5 и 4 : 3. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 14 кг нового сплава с равным содержанием железа и олова?

Ответ: 3,5 кг железа и 10,5 кг олова.

10. Имеются два сплава золота с серебром. В первом сплаве отношение золота к серебру равно 1 : 2, а во втором сплаве — 2 : 3 соответственно. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить сплав весом 19 кг, в котором отношение золота к серебру равно 7 : 12?

Ответ: 9 кг и 10 кг.

11. Водный раствор кислоты содержит воды на 18 г меньше, чем кислоты. Если бы к нему добавить количество концентрированной кислоты, по массе равное 1/3 массы концентрированной кислоты, первоначально содержащейся в растворе, то полученный новый раствор содержал бы 80 % концентрированной кислоты. Какова масса раствора и каково первоначальное процентное содержание в нём концентрированной кислоты?

Ответ: 36 г и 75 %.

12. Имеется лом стали двух сортов, причём первый сорт содержит 10 % никеля, а второй — 30 %. На сколько тонн больше нужно взять стали второго сорта, чем первого, чтобы получить 200 т стали с содержанием никеля 25 % ?

Ответ: на 100 т.

13. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 80 % и 30 % соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы; чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержавший 60 % меди?

Ответ: 3 части 80% -ного и 2 части 30%-ного.

14. Даны два сплава. Первый весит 4 кг и содержит 70 % серебра. Второй весит 3 кг и содержит 90 % серебра. Сколько килограммов второго сплава надо сплавить со всем первым сплавом, чтобы получить г %-ный сплав серебра? При каких г задача имеет решение?

Ответ: г = $78\frac{4}{7}$, 70% < г<90%

15. Сплавили 180 г золота 920-й пробы со 100 г золота 752-й пробы. Какой пробы получился сплав?

Ответ: 860-й пробы.

16. Определите пробу сплава серебра с медью, зная, что, сплавив его с 3 кг чистого серебра, получают сплав 900-й пробы, а сплавив его с 2 кг сплава 900-й пробы, получают сплав 840-й пробы.

Ответ: 800-я проба.

17. К раствору, содержащему 39 г соли, добавили 1000 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10 %. Найдите первоначальную процентную концентрацию соли в растворе.

Ответ: 13 % -ая.

18. Сплав олова с медью весом в 12 кг содержит 45 % меди. Сколько чистого олова надо добавить, чтобы получить сплав, содержащий 40 % меди?

Ответ: 1,5 кг.

19. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке — 10 %, во втором — 40 %. После сплавления этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором — 30 %. Определите массу полученного слитка.

Ответ: 3 кг.

20. Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором — в 5 раз меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди?

Ответ: в 2 раза.

21. Влажность свежескошенной травы — 60 %, сена — 15 % . Сколько сена получится из одной тонны свежескошенной травы?

22. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12 % воды. Каков процент воды в свежих грибах?

Ответ: 90%.

23. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99 %. За время хранения его влажность уменьшилась на 1 %. На сколько процентов уменьшилась масса крыжовника?

Ответ: на 50 %.

24. Имеются два слитка сплава золота с медью. Первый слиток содержит 230 г золота и 20 г меди, а второй слиток — 240 г золота и 60 г меди. От каждого слитка взяли по куску, сплавили их и получили 300 г сплава, в котором оказалось 84 % золота. Определите массу куска, взятого от первого слитка.

Ответ: 100 г.

25. Из сосуда, доверху наполненного 94%-ным раствором кислоты, отлили 1,5 л жидкости и долили 1,5 л 70%-ного раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 86%-ный раствор кислоты. Сколько литров раствора вмещает сосуд?

Ответ: 4,5 л.

26. В бидон налили 4 л молока 3%-ной жирности и 6 л молока 6%-ной жирности. Сколько процентов составляет жирность молока в бидоне?

Ответ: 4,8%.

27. В колбе было 800 г 80%-ного спирта. Провизор отлил из колбы 200 г спирта и добавил 200 г воды. Определите концентрацию (в процентах) полученного спирта.

Ответ: 60%.

28. Латунь — сплав меди и цинка. Кусок латуни содержит меди на 11 кг больше, чем цинка. Этот кусок латуни сплавили с 12 кг меди и получили латунь, в которой 75 % меди. Сколько килограммов меди было в куске латуни первоначально?

Ответ: 22,5 кг.