XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс научно-исследовательских работ учащихся средних, средних специальных учебных заведений и студентов вузов «От Альфа к Омеге…» (с международным участием)
Секция 1. Алгебра, геометрия и математический анализ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Лошницкая гимназия Борисовского района»

УВЛЕКАТЕЛЬНЫЕ СУММЫ

Автор:
Шешуков Евгений Игоревич, Осиновый Алексей Олегович учащиеся 8 класса

Руководитель: Лепленко Наталья Петровна, учитель математики

ГУО «Лошницкая гимназия Борисовского района», высшая квалификационная категория учителя

Лошница, 2021

УВЛЕКАТЕЛЬНЫЕ СУММЫ

Е.И.Шешуков, А.О.Осиновый
ГУО «Лошницкая гимназия Борисовского района», 8 класс,
аг. Лошница, Беларусь

Научный руководитель – Н.П.Лепленко, учитель математики ГУО «Лошницкая гимназия Борисовского района», высшая кв. категория учителя математики.

Работа 15 с., 5 ч.

Ключевые слова: уравнение высших степеней,формулы Кордана, бином Ньютона, метод Феррари, суммы степеней натуральных чисел.

В работе исследуются уравнения обе части, которых представляют суммы различных степеней.Представлено решение уравнений относительно x.
Цель работы: решение уравнений относительно xобе части, которых представляют суммы различных степеней.
В результате исследования впервые были получены следующие результаты:

1. Для уравнения
$x+(x+1)+\ldots+(x+n-1)+(x+n)=(x+n+1)+(x+n+2)+\ldots+(x+2n)$, если $n>0$, то $x=n^2$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x=-n^2$.
2. Для уравнения
$x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)^2=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n)^2$, если $n>0$, то $x_1=2n^2+n$, $x_2=n$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x_1=-2n^2+n$, $x_2=-n$.
3. Для уравнения
$x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)=(x+n+1)^2+(x+n+2)+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$
при чётном n, если $n>0$, то $x=\frac{n^2(2n+1)}{2(1-n^2)}$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x=\frac{n^2(2n+1)}{-2(n^2+1)}$.
4. Для уравнения
$x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)+(x+n)^2=(x+n+1)+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$ при нечётном n, если $n>0$, то $x_{1,2}=\frac{(n^2-2n-1)\pm(n+1)\sqrt{n^2-2n+3}}{2}$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x_{1,2}=\frac{(1-n^2-2n)\pm(1-n)\sqrt{n^2+2n-1}}{2}$.
5. Для уравнения
$x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+n-1)^3+(x+n)^3=(x+n+1)^3+\ldots+(x+2n)^3$, если $n>0$, то

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4-(n^2+n)^6}}+\sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4-(n^2+n)^6}}+n^2;$$

если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то

$$x=\sqrt[3]{-\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^4-(n^2-n)^6}}+\sqrt[3]{-\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^4-(n^2-n)^6}}-n^2.$$

6. Для уравнения
$x^t + (x+1)^t + \ldots + (x+n)^t = (x+n+1)^t + (x+n+2)^t + \ldots + (x+2n)^t$, если $n = 0$, то $x = 0$; если $n > 0$, то исходное уравнение можно свести к уравнению t-ой степени вида:

$$x^t = \sum_{i=1}^{t} C_t^i n^i \sum_{j=0}^{t-i} C_{t-i}^j x^{t-i-j} \sum_{m=1}^{j+1} C_n^m \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-1}^p (m-p)^j (-1)^p$$

Если $n < 0$, то аналогично $n > 0$, исходное уравнение можно свести к уравнению t-ой степени.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение алгебраических уравнений высших степеней с одним неизвестным представляет собой одну из труднейших и древнейших математических задач. Этими задачами занимались самые выдающиеся математики. Данная работа является результатом обобщения задачи «Увлекательные суммы» турнира юных математиков. Рассмотрены и решены уравнения, обе части, которых представляют суммыразличных степеней.

Цель работы:решение уравненийотносительноxобе части, которых представляют суммыразличных степеней.

Задачи исследовательской работы:

1.Найти все такие целыеx (в зависимости от n), что выполняется

1) $x+(x+1)+\ldots+(x+n-1)+(x+n)=(x+n+1)+(x+n+2)+\ldots+(x+2n)$.

2) $x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)^2=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n)^2$.

3) а) $x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)=(x+n+1)^2+(x+n+2)+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$ при четном n.

б) $x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)+(x+n)^2=(x+n+1)+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$ при нечетном n.

4) $x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+n-1)^3+(x+n)^3=(x+n+1)^3+\ldots+(x+2n)^3$.

2.Обобщить исследования.

ПУНКТ 1. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ ТАКИХ ЦЕЛЫХ X (В ЗАВИСИМОСТИ ОТ N), ЧТО ВЫПОЛНЯЕТСЯ

$$\boldsymbol{x + (x + 1) + \dots + (x + n) = (x + n + 1) + (x + n + 2) + \dots + (x + 2n)}.$$

Так как n целое число, то рассмотрим все возможные случаи:

1.1.$n > 0$.

Имеем уравнение:

$$x + (x + 1) + \dots + (x + n) = (x + n + 1) + (x + n + 2) + \dots + (x + 2n).$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$x + (x + 1) + \dots + (x + n) = (x + 1) + \dots + (x + n) + (n + n + \ldots + n).$$

Приведём подобные слагаемые: $x = n^2$ (так как правая часть исходного уравнения содержит n слагаемых, то $n + n + \ldots + n = n^2$).

1.2.$n = 0$.

Так как в левой части исходного уравнения всего $(n + 1)$ слагаемое, а в правой n слагаемых, то при $n = 0$ в правой части не будет слагаемых, а в левой части останется только x, откуда получаем $x = 0$.

1.3.$n < 0$.

Введём замену $n = -k$ и сделаем всё то, что делали для $n > 0$. Получаем:

$$x = -k^2.$$

Делаем обратную замену и получаем: $x = -n^2$.

ПУНКТ 2. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ ТАКИХ ЦЕЛЫХ X (В ЗАВИСИМОСТИ ОТ N), ЧТО ВЫПОЛНЯЕТСЯ $\boldsymbol{x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)^2}$.

Так как n целое число рассмотрим все возможные случаи:

2.1.$n > 0$.

Имеем уравнение:

$$x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)^2.$$

Используя формулу квадрата суммы и формулу суммы первых n натуральных чисел, сгруппируем всё следующим образом:

$$x^2 + (x+1)^2 + \cdots + (x+n)^2 =$$
$$= (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 + n^3 + 2n\left(nx + \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Приведём подобные слагаемые и перенесём всё в левую часть:

$$x^2 - 2n^2x - (2n^3 + n^2) = 0$$

Решаем как квадратное уравнение относительно *x:*

$$x_1 = 2n^2 + n, \qquad x_2 = -n.$$

2.2.$n = 0$.

Так как в левой части исходного уравнения всего $(n+1)$ слагаемое, а в правой n слагаемых, то при$n = 0$ в правой части не будет слагаемых, а в левой части останется только x, откуда получаем $x = 0$.

2.3.$n < 0$.

Введём замену $n = -k$ и сделаем всё то, что делали для $n > 0$. Получаем:

$$x_1 = -2k^2 - k, \qquad x_2 = k.$$

Делаем обратную замену и получаем решение:$x_1 = -2n^2 + n$, $x_2 = -n$.

ПУНКТ 3. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ ТАКИХ ЦЕЛЫХ X (В ЗАВИСИМОСТИ ОТ N), ЧТО ВЫПОЛНЯЕТСЯ

а) $\boldsymbol{x + (x+1)^2 + \ldots + (x+n) = (x+n+1)^2 + \ldots + (x+2n)}$ ПРИ ЧЁТНОМ N

б) $\boldsymbol{x + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1) + \ldots + (x+2n)}$ ПРИ НЕЧЁТНОМ N

а) Для чётного n

Так как n целое число рассмотрим все возможные случаи:

3.1.$n > 0$.

Имеем уравнение:

$$x + (x+1)^2 + \ldots + (x+n) = (x+n+1)^2 + (x+n+2) + \ldots + (x+2n)$$

Используя формулу квадрата суммы и формулу суммы первых nнечётных натуральных чисел, сгруппируем всё следующим образом:

$$x + (x+1)^2 + \ldots + (x+n) =$$

$$= (x+1)^2 + \ldots + (x+n) + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2} + 2n\left(\frac{nx}{2} + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right).$$

Приведём подобные слагаемые и перенесём всё в левую часть:

$$2x - 2n^2x - n^2 - 2n^3 = 0$$

Решаем уравнение относительно x:

$$x = \frac{n^2(2n+1)}{2(1-n^2)}$$

Докажем, что xне будет целым ни при каком чётном $n > 0$:

$$x = \frac{n^2(2n+1)}{2(1-n^2)} = -\frac{2n^3+n^2}{2n^2-2} = -\frac{n(2n^2-2) + (n^2+2n)}{2n^2-2} = -n - \frac{n^2+2n}{2n^2-2}$$

Так как n- целое, то x будет целым, если $\frac{n^2+2n}{2n^2-2}$ – целое число. В случае если $n = 2$,то x не будет целым. Заметим, что при чётном $n > 2$, $\frac{n^2+2n}{2n^2-2}$ – правильная дробь (в этом нетрудно убедиться). Так как правильная дробь будет являться целой, если она равна только 0, то x будет целым при $\frac{n^2+2n}{2n^2-2} = 0$. Решаем как квадратное уравнение и получаем два решения$n_1 = 0$, $n_2 = -2$, которые не удовлетворяют условию, значит, xне будет целым ни при каком чётном $n > 0$.

3.2.$n = 0$.

Так как в левой части исходного уравнения всего $(n+1)$ слагаемое, а в правой n слагаемых, то при$n = 0$ в правой части не будет слагаемых, а в левой части останется только x, откуда получаем $x = 0$.

3.3.$n < 0$.

Введём замену $n = -k$ и сделаем всё то, что делали для $n > 0$. Получаем:

$$x = \frac{k^2(2k-1)}{2(k^2+1)}$$

Делаем обратную замену и получаем решение:$x = \frac{n^2(2n+1)}{-2(n^2+1)}$

Доказательство, того, что xне будет целым ни при каком чётном $n < 0$ идентично тому, что для $n > 0$.

б) Для нечётного n

Так как n целое число рассмотрим все возможные случаи:

3.1.$n > 0$.

Имеем уравнение:

$$x + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 = (x+n+1) + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)$$

Используя формулу квадрата суммы и формулу суммы первых nнечётных натуральных чисел, сгруппируем всё следующим образом:

$$x + (x+1)^2 + \ldots + (x+n)^2 =$$

$$= x + (x+1)^2 + \cdots + (x+n-1) + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n-1)(n+1)^2}{2} +$$
$$+2(n+1)\left(\frac{x(n-1)}{2} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right).$$

Приведём подобные слагаемые и перенесём всё в левую часть:

$$2x^2 + 2x(2n - n^2 + 1) - (2n^3 - n^2 + 1) = 0$$

Решаем уравнение как квадратное уравнение относительно *x:*

$$x_{1,2} == \frac{(n^2 - 2n - 1) \pm (n+1)\sqrt{n^2 - 2n + 3}}{2}$$

Докажем, что xне будет целым ни при каком нечётном $n > 0$. Так как n-нечётное число, то дробь будет сокращаться, значит,x будет целым, если $n^2 - 2n + 3$ является полным квадратом. Пусть $n^2 - 2n + 3 = a^2$, тогда можно разложить это на:

$$(n - a - 1)(n + a - 1) = -2$$

Так как, nи a целые числа, то разложим -2 на все возможные множители и приравняем каждую скобку к каждому множителю. Все полученные системы не имеют решений в целых положительных числах, значит$n^2 - 2n + 3$ не является полным квадратом. Откуда следует, что xне будет целым ни при каком нечётном $n > 0$.

3.2.$n = 0$.

Так как в левой части исходного уравнения всего $(n + 1)$ слагаемое, а в правой n слагаемых, то при$n = 0$ в правой части не будет слагаемых, а в левой части останется только x, откуда получаем $x = 0$.

3.3.$n < 0$.

Введём замену $n = -k$ и сделаем всё то, что делали для $n > 0$. Получаем:

$$x_{1,2} = \frac{(2k + 1 - k^2) \pm (k+1)\sqrt{k^2 - 2k - 1}}{2}$$

Делаем обратную замену и получаем решение:

$$x_{1,2} = \frac{(1 - n^2 - 2n) \pm (1 - n)\sqrt{n^2 + 2n - 1}}{2}$$

Доказательство того, что xне будет целым ни при каком нечётном $n < 0$ идентично тому, что для $n > 0$.

ПУНКТ 4. НАХОЖДЕНИЕ ВСЕХ ТАКИХ ЦЕЛЫХ X (В ЗАВИСИМОСТИ ОТ N), ЧТО ВЫПОЛНЯЕТСЯ

$$\boldsymbol{x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+n)^3 = (x+n+1)^3 + (x+n+2)^3 + \ldots + (x+2n)^3}.$$

Так как n целое число рассмотрим все возможные случаи:

4.1.$n > 0$.

Имеем уравнение:

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+n)^3 = (x+n+1)^3 + (x+n+2)^3 + \ldots + (x+2n)^3.$$

Используя формулы сокращённого умножения, формулу суммы первых nнатуральных чисел и формулу суммы квадратов первых n натуральных чисел, сгруппируем всё следующим образом:

$$x^3 + (x+1)^3 + \cdots + (x+n)^3 =$$
$$= (x+1)^3 + \cdots + (x+n)^3 + n^4 +$$
$$+3n\left(nx^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2x\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) + 3n^2\left(nx + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Приведём подобные слагаемые и перенесём всё в левую часть:

$$2x^3 - 6n^2x^2 - 6n^2x(2n+1) - n^2(7n^2 + 6n + 1) = 0$$

Введём замену $y = x + n^2$ и сведём левую часть уравнения к кубическому трёхчлену:

$$y^3 - 3n^2y(n+1)^2 - \frac{\left(n(n+1)(2n+1)\right)^2}{2} = 0$$

Решаем это уравнение, используя формулу Кардано:

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4 - (n^2+n)^6}} +$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4 - (n^2+n)^6}}$$

Делаем обратную замену и получаем:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4 - (n^2+n)^6}} +$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4 - (n^2+n)^6}} + n^2$$

4.2.$n = 0$.

Так как в левой части исходного уравнения всего $(n+1)$ слагаемое, а в правой n слагаемых, то при$n = 0$ в правой части не будет слагаемых, а в левой части останется только x, откуда получаем $x = 0$.

4.3.$n < 0$.

Введём замену $n = -k$ и сделаем всё то, что делали для $n > 0$. Получаем:

$$x = \sqrt[3]{-\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}\right)^4 - (k^2+k)^6}} +$$

$$+\sqrt[3]{-\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}\right)^4-(k^2+k)^6}}-k^2$$

Делаем обратную замену и получаем решение:

$$x=\sqrt[3]{-\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}\right)^4-(n^2-n)^6}}+$$

$$+\sqrt[3]{-\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}\right)^4-(n^2-n)^6}}-n^2$$

Решение будет полным, если доказать, что x не будет целым ни при каком целом $n \neq 0$. Это утверждение является гипотезой, его необходимо проверить.

ПУНКТ 5. ОБОБЩЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Попробуем обобщить исследование и решить задачу для любой степени t

Так как n-целое число, то рассмотрим все возможные случаи:

5.1.$n > 0$.

Имеем уравнение:

$$x^t + (x+1)^t + \ldots + (x+n)^t = (x+n+1)^t + (x+n+2)^t + \ldots + (x+2n)^t$$

Сгруппируем правую часть следующим образом:

$$x^t + (x+1)^t + \cdots + (x+n)^t =$$

$$= \big((x+1)+n\big)^t + \big((x+2)+n\big)^t + \ldots + \big((x+n)+n\big)^t$$

Используя Бином Ньютона, раскроем каждую скобку в правой части:

$$x^t + (x+1)^t + \cdots + (x+n)^t =$$

$$= \sum_{i=0}^{t} C_t^i (x+1)^{t-i} n^i + \sum_{i=0}^{t} C_t^i (x+2)^{t-i} n^i + \ldots + \sum_{i=0}^{t} C_t^i (x+n)^{t-i} n^i$$

Используем свойство $\sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i = \sum_{i=k}^{n} (a_i + b_i)$:

$$x^t + (x+1)^t + \cdots + (x+n)^t =$$

$$= \sum_{i=0}^{t} C_t^i n^i \big((x+1)^{t-i} + (x+2)^{t-i} + \ldots + (x+n)^{t-i}\big)$$

Сократим обе части уравнения на $(x+1)^t + \cdots + (x+n)^t$:

$$x^t = \sum_{i=1}^{t} C_t^i n^i \big((x+1)^{t-i} + (x+2)^{t-i} + \ldots + (x+n)^{t-i}\big)$$

Используя Бином Ньютона, раскроем каждую скобку от $(x+1)^{t-i}$ до $(x+n)^{t-i}$, а затем используем вышеописанное свойство:

$$x^t = \sum_{i=1}^{t} C_t^i n^i \sum_{j=0}^{t-i} C_{t-i}^j x^{t-i-j} \big(1^j + 2^j + \ldots + n^j\big)$$

Используя формулу $S_k(n) = \sum_{i=1}^{k+1} C_n^i \sum_{j=0}^{i-1} C_{i-1}^j (i-j)^k (-1)^j$, где $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$,получаем:

$$x^t = \sum_{i=1}^{t} C_t^i n^i \sum_{j=0}^{t-i} C_{t-i}^j x^{t-i-j} \sum_{m=1}^{j+1} C_n^m \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-1}^p (m-p)^j (-1)^p$$

Значит, исходное уравнение всегда можно свести к уравнению t-ой степени, решив которое, выразим xчерез n.

5.2.$n = 0$.

Так как в левой части исходного уравнения всего $(n+1)$ слагаемое, а в правой n слагаемых, то при$n = 0$ в правой части не будет слагаемых, а в левой части останется только x, откуда получаем $x = 0$.

5.3.$n < 0$.

Введём замену $n = -k$ и аналогично $n > 0$ сведём всё к уравнению t-ой степени.

В частности, при $t = 4$ можно получить общее решение, используя метод Феррари.

Если требуется найти коэффициент при конкретном члене уравнения, можно раскрыть первые две суммы, а затем привести подобные слагаемые.
Решение будет полным, если доказать, что при $t \geq 3$, x не будет целым ни при каком целом $n \neq 0$. Это утверждение является гипотезой, его необходимо проверить.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе данного исследования получили:

1. Для уравнения $x+(x+1)+\ldots+(x+n-1)+(x+n)=(x+n+1)+(x+n+2)+\ldots+(x+2n)$, если $n>0$, то $x=n^2$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x=-n^2$.
2. Для уравнения $x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)^2=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n)^2$, если $n>0$, то $x_1=2n^2+n$, $x_2=n$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x_1=-2n^2+n$, $x_2=-n$.
3. Для уравнения $x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)=(x+n+1)^2+(x+n+2)+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$ при чётном n, если $n>0$, то $x=\frac{n^2(2n+1)}{2(1-n^2)}$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x=\frac{n^2(2n+1)}{-2(n^2+1)}$.
4. Для уравнения $x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)+(x+n)^2=(x+n+1)+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$ при нечётном n, если $n>0$, то $x_{1,2}=\frac{(n^2-2n-1)\pm(n+1)\sqrt{n^2-2n+3}}{2}$; если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x_{1,2}=\frac{(1-n^2-2n)\pm(1-n)\sqrt{n^2+2n-1}}{2}$.
5. Для уравнения $x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+n-1)^3+(x+n)^3=(x+n+1)^3+\ldots+(x+2n)^3$, если $n>0$, то

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4-(n^2+n)^6}}+$$

$+\sqrt[3]{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^4-(n^2+n)^6}}+n^2$;если $n=0$, то $x=0$; если $n<0$, то $x=\sqrt[3]{-\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^4-(n^2-n)^6}}+$

$+\sqrt[3]{-\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{n(n-1)(1-2n)}{2}\right)^4-(n^2-n)^6}}-n^2$.

6. Для уравнения $x^t+(x+1)^t+\ldots+(x+n)^t=(x+n+1)^t+(x+n+2)^t+\ldots+(x+2n)^t$, если $n=0$, то $x=0$; если $n>0$, то исходное уравнение можно свести к уравнению t-ой степени вида:

$$x^t=\sum_{i=1}^{t}C_t^i n^i\sum_{j=0}^{t-i}C_{t-i}^j x^{t-i-j}\sum_{m=1}^{j+1}C_n^m\sum_{p=0}^{m-1}C_{m-1}^p(m-p)^j(-1)^p$$

Если $n<0$, то аналогично $n>0$, исходное уравнение можно свести к уравнению t-ой степени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Арефьева, И. Г. Алгебра: учебное пособие для 9 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / И. Г. Арефьева, О. И. Пирютко. – Минск: Народная асвета,2019. – 326 с.

2. Арефьева, И. Г. Школа юных математиков. Алгебра. 9 класс: пособие для учащихся учреждений общего среднегообразования с русским языком обучения / И. Г. Арефьева, О. И. Пирютко. – Минск: Аверсэв,2019. – 96 с.

4.Самаров, К. Л., Самарова С.С. Справочник по математикедля школьников / К.Л. Самаров, С. С. Самарова // Решение кубических ний[Электронный ресурс]. –2020. –Режим доступа: https://www.resolventa.ru/spr/algebra/cardano.htm – Дата доступа: 04.11.2020

5.Самаров, К. Л., Самарова С.С. Справочник по математикедля школьников / К.Л. Самаров, С. С. Самарова // Бином Ньютона [Электронный ресурс]. –2020. –Режим доступа:https://www.resolventa.ru/spr/algebra/cardano.htm. – Дата доступа: 10.11.2020.

6. Сумма степеней натуральных чисел. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа:http://slovesnov.users.sourceforge.net/?sum_power,russian. – Дата доступа: 25. 11.2020.

7. Сумма.[Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://ru.wikipedia.org.– Дата доступа: 25. 11.2020.