МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Гимназия № 10 г. Гродно»

Бармаглот

Шило Даниил Русланович,
учащийся 7 «Б» класса

Чутора Елизавета Андреевна,
учитель математики
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно»,
вторая кв. категория учителя математики

Гродно, 2021

Бармаглот

Д. Р. Шило
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно», 7 «Б» класс,
Гродно, Беларусь

Научный руководитель – Е. А. Чутора, учитель математики ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно», вторая кв. категория учителя математики.

Работа 12 с., 1 ч., 5 табл., 1 источник.
Ключевые слова:целая часть, остаток от деления,диафантово уравнение.

В работе исследуется задача, представленная на Минском городском открытом Турнире юных математиков в 2021 году, в которой идёт речь о Бармаглоте, у которого имеется различное количество голов: 1, 2020, 2021 и любое натуральное число. На бой с Бармаглотом вышел рыцарь. У рыцаря есть 4 типа разящих мечей, которые могут отрубить только определённое количество голов. У Бармаглота есть весьма странная система регенерации, позволяющая ему мгновенно отращивать головы. Перечислим способности разящих мечей, с учётом регенерации голов Бармаглота: если отрубить ему 33 головы, то вырастет 40 голов; если отрубить 21 голову, то не вырастет ни одной; если отрубить 17 голов, то вырастет 14; если отрубить 1 голову, то вырастет 10.

Цель работы: определить, можно ли убить Бармаглота с помощью данных мечей и найти минимальное количество ударов этими мечами. Определить условия для набора из трех разящих мечей, чтобы можно было убить Бармаглота с любым натуральным числом голов.

В процессе исследования были получены следующие результаты:

Утверждение 1. С помощью указанного набора мечей I -IV можно убить Бармаглота с 2020 головами.Наименьшее количество ударов мечами при этом равно 102.

Утверждение 2.С помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглота с 2021 головой. Наименьшее количество ударов мечами при этом равно 99.

Утверждение 3.С помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглота с 1 головой. Наименьшее количество ударов мечами при этом равно 11.

Теорема 1.С помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглотас любым натуральным числом голов*H*.

Теорема 2.Тройки разящих мечей, с помощью которых можно убить Бармаглота с любым натуральным количеством голов, имеют один из вид:

$$(1; 1 + k_1), (m_2; m_2 + k_2), \ (m_3; 0), \tag{1}$$

где $k_1 > 2, \ |k_2| > 2, \ m_3 > 2, \ m_2 \in \mathbb{N}, \ \text{НОД}(k_1, k_2, m_3) = 1$.

В процессе доказательства данных утверждений и теорем был разработан алгоритм, указывающий последовательность действий для уничтожения любого числа голов Бармаглота и доказана его оптимальность.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы заключается в том, что при подготовке учащихся к олимпиадам по математике и математическим турнирам необходимо развивать их логическое мышление при решение игровых логических задач. Таким образом, представляется интересным исследовать задачу, представленную на VIII Минском городском открытом Турнире юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) в 2021 году. Суть задачи заключается в следующем.

Под деревом Тумтум завёлся Бармаглот. У Бармаглота 2020 голов. На бой с Бармаглотом вышел рыцарь. У рыцаря есть 4 типа разящих мечей, которые могут отрубить только определённое количество голов. У Бармаглота есть весьма странная система регенерации, позволяющая ему мгновенно отращивать головы. Перечислим способности разящих мечей, с учётом регенерации голов Бармаглота: если отрубить ему 33 головы, то вырастет 40 голов; если отрубить 21 голову, то не вырастет ни одной; если отрубить 17 голов, то вырастет 14; если отрубить 1 голову, то вырастет 10.

1. Можно ли отрубить ему все головы? Если да, то как?

2. Какое наименьшее количество ударов мечами надо сделать, чтобы отрубить все головы?

3. Как данными мечами срубить все головы, если голов 2021? Какое наименьшее количество ударов придется сделать?

4. Как данными мечами срубить все головы, если голов 1? Какое наименьшее количество ударов придется сделать?

5. Для любого ли натурального H можно убить Бармаглота с H головами, если у рыцаря есть описанный набор мечей?

6. Пусть $m \in N$, $n \in N \cup \{0\}$. Назовём меч (m, n)-разящим, если он может срубить m голов и при этом вырастает n голов. Можно ли подобрать набор из трёх (m, n)-разящих мечей ($|m - n| > 2$) с помощью которых можно убить Бармаглота с любым натуральным количеством голов? Если можно, то опишите все такие тройки разящих мечей.

Цель работы: определить, можно ли убить Бармаглота с помощью данных мечей и найти минимальное количество ударов этими мечами.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1) Показать, что с помощью указанного набора мечей I -IV можно убить Бармаглота с 1, 2020 и 2021 головой.

2) Найти минимальные количества ударов в каждом случае.

3) Доказать, что с помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглотас H головами, где $H \in \mathbb{N}$.

4) Разработать алгоритм последовательности действий для уничтожения любого числа голов Бармаглота.

5) Определить общий вид троек разящих мечей вида (m_i, n_i), $i = 1,2,3$, где$m_i \in \mathbb{N}$ – число голов, которые рыцарь срубает,$m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$– число голов, которые вырастают.

1 БАРМАГЛОТ С 1, 2020 И 2021 ГОЛОВОЙ

После удара I мечом, число голов увеличится на 7. После II – уменьшится на 21. После удара III – уменьшится на 3. После удара IV – увеличится на 9. Поэтому в дальнейшем ударпервым мечем будем обозначать +7, вторым –21, третьим –3, четвертым +9.

Утверждение 1. С помощью указанного набора мечей I–IV можно убить Бармаглота с 2020 головами.Наименьшее количество ударов мечами при этом равно 102.

Доказательство.

Убить Бармаглота с 2020 головами можно, например, за 104 операции:

$$2020 + 7 + 7 + 9 + 9 + 9 - 3 - 98 \cdot 21 = 0.$$

Попробуем добиться этого результата за меньшее число операций. Заметим, что последний удар должен быть вторым мечом, т.к. только после него не прибавляется голов. Более того, именно удары вторым мечом наиболее выгодны, т.к. именно он уменьшает число голов на наибольшее количество.

Значит нужно привести число голов до числа, кратного 21, а затем воспользоваться мечом II.2020 даёт в остатке 4 при делении на 21.Таким образом, нужно число 4 с помощью наименьшего числа операций +7, –3, +9 привести к 0, или ± 21, или ± 42, …

За 5 операций можно привести число 4 к 21:

$$4 + 7 + 7 + 9 - 3 - 3 = 21.$$

Покажем, что за меньшее число ударов это сделать не удастся. Запишем все возможные изменения числа голов за 1, 2, 3, 4, 5 ударов в таблицу 1.1. Для этого к каждому числу второго столбца прибавляем поочередно +7, –3, +9 и записываем в следующую строку второго столбца в порядке возрастания, повторения не учитываем. Все возможные изменения числа голов показаны в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Число ударов	Возможные изменения числа голов
1	–3, +7, +9
2	–6, +4, +6, +14, +16, +18
3	–9, +1, +3, +11, +13, +15, +21, +23, +25, +27
4	–12, –2, 0, +8, +10, +12, +18, +20, +22, +24, +28, +30, +32, +34, +36
5	–15, –5, –3, +5, +7, +9, +15, +17, +19, +21, +25, +27, +29, +31, +33, +35, +37, +39, +41, +43, +45

Так как в первых 4-х строках таблицы 1 нет чисел –25, –4, +17, +38, которые дополнят 4 до кратного 21, то за меньше 5 ходов это сделать не удастся.

Тогда $2020 + 7 + 7 + 9 - 3 - 3 - 97 \cdot 21 = 0$.Таким образом, понадобится минимум 102 операции.

Утверждение 2.С помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглота с 2021 головой. Наименьшее количество ударов мечами при этом равно 99.

Доказательство.

Сейчас у Бармаглота 2021 голова. Число 2021 даёт в остатке 5 при делении на 21. Число 5 до кратного 21 дополняют числа –26, –5, +16, +37…

Из таблицы 1 видно, что минимум за 2 хода этого можно добиться:$5 + 9 + 7 = 21$. Тогда $2021 + 9 + 7 - 97 \cdot 21 = 0$.Таким образом, всего понадобится 99 ударов: один IV мечом, один Iи 97 II.

Утверждение 3.С помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглота с 1 головой. Наименьшее количество ударов мечами при этом равно 11.

Первый удар можно нанести только IV мечом. Минимальное число ходов – 11. Действовать нужно следующим образом:

$1 + 9 + 9 + 9 + 9 + 7 + 7 - 3 - 3 - 3 - 2 \cdot 21 = 0.$

Доказательство этого утверждения содержится в следующем разделе.

2 БАРМАГЛОТ С H ГОЛОВАМИ

Теорема 1.С помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглотаслюбым натуральным числом головH.

Доказательство.

Для этого определяем остаток от деления H на 21. Если $H \vdots 21$, то просто отрубаем все головы II мечом. Если Hне делится на 21, то пользуемся таблицей 2.1. В первом столбце указан остаток от деления H на 21. Во втором указана последовательность действий, которая наискорейшим образом поможет дополнить этот остаток до кратного 21.При составлении таблицы 2.1 использовали таблицу 1.1. Для каждого остатка r, просматривая таблицу 2.1 сверху вниз, искали число $-r$, $21-r$, $42-r$, тем самым определяли минимальное число ударов, приводящих остаток r к кратному 21. Так как таблица 2.1 содержит числа, дающие все остатки от деления на 21, то будет достаточно не более 5 ударов.В третьем столбце таблицы 2.1указано при каких H реализуема указанная во втором столбце последовательность действий. Если H меньше, чем указанное в 3-ем столбце, то следует воспользоваться мечом IV, т.е. увеличить H на 9, затем определить новый остаток и снова воспользоваться таблицей 2.1. В итоге мы получим число голов, кратное 21 и отрубаем их мечом II. Последовательность действий показана в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Остаток r	Последовательность действий	Ограничения на H
1	$+9+7+7-3$	$H \geq 24$
2	$+7-3-3-3$	$H \geq 33$
3	-3	$H \geq 17$
4	$+9+7+7-3-3$	$H \geq 24$
5	$+9+7$	$H \geq 24$
6	$-3-3$	$H \geq 20$
7	$+7+7$	$H \geq 33$
8	$+9+7-3$	$H \geq 24$
9	$-3-3-3$	$H \geq 23$
10	$+7+7-3$	$H \geq 33$
11	$+9+7-3-3$	$H \geq 24$
12	$+9$	$H \geq 1$
13	$+7+7-3-3$	$H \geq 33$
14	$+7$	$H \geq 33$
15	$+9-3$	$H \geq 8$
16	$+7+7-3-3-3$	$H \geq 33$
17	$+7-3$	$H \geq 33$
18	$+9-3-3$	$H \geq 11$
19	$+9+7+7$	$H \geq 24$
20	$+7-3-3$	$H \geq 33$

Доказательство утверждения 3. Поясним данный алгоритм для числа H=1. Остаток от деления на 21 равен $r = 1$. Последовательность из таблицы 2.1 при $r = 1$ реализуема при $H \geq 24$, т.к. мы не можем воспользоваться, например, мечом I если у нас меньше 33 голов. Значит с помощью меча IV увеличиваемH на 9.

$1 + 9 = 10$; $r = 10$. В таблице 2 эта строка реализуема при $H \geq 33$. Снова увеличиваем на 9:

$10 + 9 = 19$, $r = 19$. Это реализуемо при $H \geq 24$. Снова увеличиваем число голов на 9:

$19 + 9 = 28$; $r = 7$. Но в таблице указано, что при этом $H \geq 33$. Еще раз увеличиваем на 9:

$28 + 9 = 37$; $r = 16$. Это число удовлетворяет ограничению $H \geq 33$.

Значит выполняем последовательность $+7 + 7 - 3 - 3 - 3$.

При этом получаем 37$+7 + 7 - 3 - 3 - 3 = 42$. И далее 2 раза мечом II отрубаем по 21 голове. Итак:

$$1 + 9 + 9 + 9 + 9 + 7 + 7 - 3 - 3 - 3 - 21 - 21 = 0.$$

Потребовалось 11 операций.

3 СРАЖЕНИЕ С БАРМАГЛОТОМ С ПОМОЩЬЮ ТРЕХ МЕЧЕЙ

Теорема 2. Тройки разящих мечей, с помощью которых можно убить Бармаглота с любым натуральным количеством голов, имеют один из вид:

$$(1; 1 + k_1), (m_2; m_2 + k_2), \ (m_3; 0), \tag{1}$$

где $k_1 > 2, \ |k_2| > 2, \ m_3 > 2, \ m_2 \in \mathbb{N}, \ \text{НОД}(k_1, k_2, m_3) = 1$.

Доказательство.

Пусть $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Меч(m, n) – разящий отрубает m голов и при этом вырастает n голов, $|m - n| > 2$. Подберем три меча (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) чтобы с их помощью можно было срубить любое натуральное число голов.

Обозначим $k_1 = n_1 - m_1, k_2 = n_2 - m_2, k_3 = n_3 - m_3$. По условию $|k_i| > 2, i = 1, 2, 3$.

Чтобы процесс срубания голов закончился, одно из чисел n_i должно быть равно 0. Пусть $n_3 = 0$. Тогда $m_3 > 2$.

Также заметим, что одно из чисел m_1 или m_2 должно быть равно 1, иначе не удастся убить дракона с 1 головой. Пусть для определённости $m_1 = 1$. Тогда $n_1 = 1 + k_1$, где $k_1 > 2$.

Числа k_1 и k_2 подберем так, чтобы можно было убить Бармаглота с 1 головой. Заметим, что в этом случае можно будет также убить Бармаглота с любым числом голов H, уменьшая число голов на 1 H раз.

Пусть для срубания 1 головы потребуется x ударов мечом I, y ударов мечом II и z ударов мечом III, т.е. имеет место уравнение

$$k_1 x + k_2 y - m_3 z = -1, \tag{2}$$

где $k_1 > 2, \ |k_2| > 2, \ m_3 > 2, \ x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Согласно теореме 1.7 [1,С.33] диафантово уравнение $ax + by + cz = d$ имеет бесконечное множество решение в целых числах тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(a, b, c, d)$.

Значит, чтобы уравнение (2) имело решение в целых числах, необходимо и достаточно чтобы $\text{НОД}(k_1, k_2, m_3) = 1$. Так как среди коэффициентов уравнения (2) есть и положительные ($k_1 > 2$) и отрицательные ($-m_3 < -2$), то среди решений уравнения (2) обязательно найдется решение в целых неотрицательных числах.

Таким образом, получили тройки мечей вида (1).

Пример 1. $(1;\ 4), (8;\ 2), (7;\ 0), k_1 = 3, k_2 = -6$. Чтобы срубить любое натуральное число голов, нужно с помощью мечей I,II привести его к числу кратному 7. Последовательность действий для всех остатков от деления на 7 показана в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Остаток r	Последовательность действий
1	$+3 + 3$
2	$+3 - 6 - 6$
3	$+3 - 6$
4	$+3$
5	$+3 + 3 + 3$
6	-6

Пример 2. $(1;\ 5), (6;\ 3), (13;\ 0), k_1 = 4, k_2 = -3$. Чтобы срубить любое натуральное число голов, нужно с помощью мечей I,II привести его к числу кратному 13. Последовательность действий для всех остатков от деления на 13 показана в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Остаток r	Последовательность действий
1	$+4+4+4$
2	$+4-3-3$
3	-3
4	$+4+4+4-3$
5	$+4+4$
6	$-3-3$
7	$+4+4+4-3-3$
8	$+4+4-3$
9	$+4$
10	$+4+4+4-3-3-3$
11	$+4+4-3-3$
12	$+4-3$

Пример 3. $(1;\ 19), (8;\ 20), (5;\ 0), k_1 = 18, k_2 = 12$.Чтобы срубить любое натуральное число голов, нужно с помощью мечей I,IIпривести его к числу кратному 5. Последовательность действий для всех остатков от деления на 5 показана в таблице е 3.3.

Таблица 3.3

Остаток r	Последовательность действий
1	$+12+12$
2	$+18$
3	$+12$
4	$+18+18$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования была полностью решена данная постановка задачи и были получены следующие результаты:

1. С помощью указанного набора мечей I -IV можно убить Бармаглота с 1, 2020 и 2021 головой.

2. Найдены минимальные количества ударов в каждом случае.

3. Доказано, что с помощью указанного набора мечей I-IV можно убить Бармаглотас H головами, где $H \in \mathbb{N}$.

4. Разработан алгоритм последовательности действий для уничтожения любого числа голов Бармаглота.

5. Найден общий вид троек разящих мечей вида (m,n), гдеmÎ N – число голов, которые рыцарь срубает,nÎ NÈ$\{0\}$ – число голов, которые вырастают.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ю.В. Нестеренко Теория чисел.– М.: Академия, 2008. — 272 с.