МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Гимназия №10 г. Гродно»

ЧИСЛА В РЯД

Сытая Дарья Дмитриевна
учащаяся 9 «Б» класса
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно»

Кулеш Елена Евгеньевна,
доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Я.Купалы,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
учитель математики
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно»

г. Гродно, 2021

ЧИСЛА В РЯД

Д. Д. Сытая
ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно», 9 «Б» класс,
Гродно, Беларусь

Научный руководитель – Е. Е. Кулеш, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Я.Купалы,кандидат физ.-мат. наук, доцент, учитель математики ГУО «Гимназия № 10 г. Гродно».

Работа 13 с., 4 ч., 5 табл., 1 источник.

Ключевые слова:неравенство, делимость, целая часть, остаток.

В работе исследуется задача, предложенная на VIII Минском городском открытом турнире юных математиков 2021г. Рассматривается несколько целых чисел, которые можно выставить в ряд так, что сумма любых m подряд идущих чисел из этого ряда будет отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел из этого ряда будет положительна. Требуется установить максимально возможное количество чисел данного ряда.

Объектом исследования является последовательность чисел

Цель работы – определить максимальное количество чисел данной последовательности, чтобы они обладали указанным свойством.

Основным методом исследования является метод определения количества чисел, при котором возникает противоречие в определении знака суммы некоторых из них. И приведение примера, доказывающего, что если уменьшить это количество на 1, то указанное свойство будет выполнено.

В результате исследования впервые были доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. Если сумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, то $max < \text{НОК}(m, n)$.

Следствие 1. Если $n \vdots m$, то числа, обладающие указанным свойством не существуют.

Лемма 2. Если сумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, то max<$m + n - 1$.

Утверждения 2.1-2.3. Еслиm=2, n=3, тоmax=3. Еслиm=5, n=7, тоmax=10. Еслиm=7,n=9, тоmax=14.

Утверждение 3.1. Если $n \geq 2$, сумма любых n подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых $n + 1$ подряд идущих чисел положительна, то $max = 2n - 1$.

Утверждение 3.2. Если n четное число, $n > 2$, сумма любых n подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых $n + 2$ подряд идущих чисел положительна, то$max = 2n - 1$.

Утверждение 3.3. Если n нечетное число, $n > 2$, сумма любых n подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых $n + 2$ подряд идущих чисел положительна, то $max = 2n$.

Утверждение 4.1 Еслисумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, $m \vdots p$, где p– остаток от деления n на m то максимальное число чисел в ряду не больше $max = n + m - p - 1$

Утверждение 4.2 Еслисумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, $n = sm + p$, $m = kp + l$, $p \vdots l$, где l– остаток от деления m на p то максимальное количество чисел в ряду не больше $max = n + m - l - 1$

Предложение 1. Максимальное количество чисел в ряду не больше $max = m + n - \text{НОД}(m, n) - 1$.

Результаты данной работы могут бытьиспользованы учащимися школ и гимназий а также учителями при проведении факультативов по подготовке к олимпиадам и математическим турнирам.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Каждый день жизнь ставит перед нами множество задач: больших и маленьких, сложных и непростых, затееватых логических проблем. Умение анализировать, выделять главное, обобщать, выдвигать гипотезу, проверять ее, разрабатывать стратегию – важные цели, достичь которые и помогают логические задачи. Логические, игровые задачи сейчас особенно популярны. Они наиболее часто встречаются на различных математических олимпиадах. Более того, они всегда интересны и увлекательны.

Таким образом, научиться решать игровые и логические задачи, является весьма важной и актуальной задачей, чем и обусловлен выбор темы исследования.

В данной работе решена задача, предложенная на VIII Минском городском открытый турнире юных математиков – 20219, младшая лига, 5-7 классы.

Постановка задачи:

1. Будем рассматривать несколько целых чисел, выставленных в ряд с таким свойством, что сумма любых двух рядом стоящих из них будет отрицательна, а любых трех из них, идущих подряд, будет положительна. Например, три следующих числа обладают этим свойством: 2, –3, 2. А какое максимальное количество целых чисел можно выставить в ряд, чтобы выполнялось указанное выше свойство.

2. Ответьте на вопрос пункта 1, если сумма любых пяти (а не двух) подряд идущих чисел из этого ряда будет отрицательна, а любых семи (а не трех) подряд идущих чисел из этого ряда будет положительна.

3. Ответьте на вопрос пункта 1, если сумма любых семи подряд идущих чисел из этого ряда будет отрицательна, а любых девяти подряд идущих чисел из этого ряда будет положительна.

4. Выясните, для каких натуральных чисел n найдутся несколько целых чисел, которые можно выставить в ряд так, что сумма любых n подряд идущих чисел из этого ряда будет отрицательна, а сумма любых $n + 1$ подряд идущего числа из этого ряда будет положительна. Для этих значений n определите, какое максимальное количество целых чисел можно выставить в ряд чтобы выполнялось указанное выше свойство.

5. Ответьте на вопрос пункта 4, если сумма любых n подряд идущих чисел из этого ряда будет отрицательна, а любых $n + 2$ подряд идущих чисел из этого ряда будет положительна.

6. Для каких натуральных чисел m и n найдутся несколько целых чисел, которые можно выставить в ряд так, что сумма любых m подряд идущих чисел из этого ряда будет отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел из этого ряда будет положительна. Для этих значений m и n определите, какое максимальное количество целых чисел можно выставить в ряд чтобы выполнялось указанное выше свойство.

Объект исследования: последовательность чисел, обладающая определенными свойствами.

Предмет исследования: максимальное количество чисел данной последовательности.

Цель работы: научиться анализировать числовую информацию, обобщать полученные результаты, решить предложенную задачу о максимальном количестве чисел в ряду, обладающем определенными свойствами.

Основным **методом** исследования является метод определения количества чисел, при котором возникает противоречие в определении знака суммы некоторых из них. И приведение примера, доказывающего, что если уменьшить это количество на 1, то указанное свойство будет выполнено.

1 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Прежде всего отметим, что если сумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, по ряд из чисел не может быть бесконечным.

Будем считать для определенности, что $m < n$, т.к. если это не так, то умножив все числа ряда на -1, получим $m < n$.

Лемма 1. Если сумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, то количество чисел в ряду должно быть меньше НОК(m, n).

Доказательство. Пусть в ряду есть НОК(m, n) чисел. Тогда разбив их на группы, последовательных чисел по m штук в каждой получим, что сумма чисел в каждой группе отрицательна и, следовательно, сумма всех чисел отрицательна.

С другой стороны, разбив их на группы последовательных чисел по n штук в каждой, получим что сумма чисел в каждой группе положительна и сумма всех чисел положительна. Получим противоречие. Значит, чисел в ряду должно быть меньше НОК(m, n). ¨

Следствие 1. Если $n \vdots m$, то числа, обладающие свойством сумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна не существуют.

Доказательствоследует из леммы 1, так как в этом случае $n =$ НОК(m, n).

Лемма 2. Если сумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, то количество чисел в ряду должно быть меньше $m + n - 1$.

Доказательство. Пусть в ряду есть $m + n - 1$ чисел. Расставим их в таблице из m строк и n столбцов.

(	a_r
(	a_r
(	a_r
.	…
(	a_r

Сумма чисел в каждой строке положительна, сумма чисел в каждом столбце отрицательна. Тогда сумма всех чисел таблицы с одной стороны получится положительной (если просуммировать сначала по строкам, а затем по столбцам), а с другой стороны отрицательная (если просуммировать сначала по столбцам, а затем по строкам). Получили противоречие. Значит чисел в ряду должно быть меньше $m + n - 1$. ¨

2 НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

2.1 $m = 2, n = 3$

Утверждение 2.1.Если сумма двух рядом стоящих чисел положительна, а сумма трёх рядом стоящих чисел отрицательна, то максимальное количество чисел в ряду равно 3.

Доказательство. В силу леммы 2 чисел в ряду должно быть меньше чем 3+2–1=4. Значит чисел может быть 3. Докажем это другим способом. Пусть возможно выставить в ряд 4 числа.

Т.к. $a_1 + a_2 + a_3 > 0, a_2 + a_3 < 0$, то $a_1 > 0$.

Т.к. $a_2 + a_3 + a_4 > 0, a_3 + a_4 < 0$, то $a_2 > 0$.

Но тогда$a_1 + a_2 > 0$, что противоречит условию $a_1 + a_2 < 0$.

Пример трех чисел, удовлетворяющих условию: 2, –3, 2.

2.2 $m = 5, n = 7$

Утверждение2.2.Если сумма любых 5 подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых 7 подряд идущих чисел положительна, то максимальное количество чисел в ряду равно 10.

Доказательство.В силу леммы 2 чисел должно быть меньше 11. Докажем это другим способом. Пусть в ряд выставлены числа

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \ldots$$

Т.к. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 > 0$, а $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 0$, то $a_1 + a_2 > 0$.

Аналогично из того что $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 > 0$, и $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + +a_9 < 0$, следует $a_3 + a_4 > 0$.

Значит $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$. Но $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 0$. Значит,$a_5 < 0$.

Рассматривая аналогично семёрки чисел $a_2, a_3, \ldots, a_8$ и $a_4, a_5, \ldots, a_{10}$, получаем $a_2 + a_3 > 0$ и $a_4 + a_5 > 0$.Но т.к. $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < 0$, то $a_6 < 0$.

Тогда $a_5 + a_6 < 0$. Если в ряду есть 11 чисел, то тогда$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$, и$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$, что противоречит условию. Значит чисел должно быть меньше 11.

Пример расстановки 10 чисел:

$$-5, 7, -5, 7, -5, -5, 7, -5, 7, -5.$$

Здесь сумма любых 5 чисел равна –1, сумма любых 7 чисел равна 1.

Значит, действительно максимальное количество чисел в ряду равно 10.

2.3$m = 7, n = 9$

Утверждение2.3.Если сумма любых 7 подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых 9 подряд идущих чисел положительна, то максимальноечисло чисел в ряду равно 14.

Доказательство. В силу леммы 2 чисел должно быть меньше 15. Докажем другимспособом,что 15 чисел невозможно расставить в ряд. Предположим противное:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \ldots$$

Т.к. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_9 > 0, a_3 + a_4 + \ldots + a_9 < 0$, то $a_1 + a_2 > 0$.

Т.к. $a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{11} > 0, a_5 + a_6 + \ldots + a_{11} < 0$, то $a_3 + a_4 > 0$.

Т.к. $a_5 + a_6 + a_7 + \ldots + a_{13} > 0, a_7 + a_8 + \ldots + a_{13} < 0$, то $a_5 + a_6 > 0$.

Тогда $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 0$. Но $a_1 + a_2 + \ldots + a_7 < 0$.Значит $a_7 < 0$.

Рассматривая три девятки чисел, но со сдвигом на одно число вправо, т.е. начиная с a_2 аналогично доказываем, что $a_8 < 0$. Тогда $a_7 + a_8 < 0$.

Если после a_8 найдётся ещё 7 чисел подряд, то их сумма по условию отрицательна, т.е. $a_9 + \ldots + a_{15} < 0$. Но тогда $a_7 + a_8 + a_9 + \ldots + a_{15} < 0$, что противоречит условию.

Пример 14 чисел, удовлетворяющих условию:

$$-7, 9, -7, 9, -7, 9, -7, -7, 9, -7, 9, -7, 9, -7.$$

Здесь сумма любых 7 чисел равна –1, сумма любых 9 чисел равна 1.

3ДВА ОБЩИХ СЛУЧАЯ

3.1n отрицательных чисел и $n + 1$ положительных

Заметим, что если $n = 1$, то $n + 1 = 2$ и тогда $n + 1 \vdots n$. Условие задачи в этом случае невыполнимо в силу следствия 1.

Утверждение 3.1.Если $n \geq 2$, сумма любых n подряд идущих чисел отрицательна, асумма любых $n + 1$ подряд идущих чисел положительна, то максимальное число чисел в ряду равно $2n - 1$.

Доказательство. Пусть $n \geq 2$. В каждой последовательности из $n + 1$ числа первое и последнее положительны. В самом деле, т.к. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} > 0$, $a_2 + \cdots + a_{n+1} < 0$ то $a_1 > 0$, т.к. $a_1 + \cdots + a_n < 0$, то $a_{n+1} > 0$.

Среди $n + 1$ чисел $a_2, \ldots, a_{n+2}$ будет $a_2 > 0$, $a_{n+2} > 0$.

Среди $n + 1$ чисел $a_3, \ldots, a_{n+3}$ будет $a_3 > 0$, $a_{n+3} > 0$ и т.д.

Среди $n + 1$ чисел $a_{n-1}, \ldots, a_{2n-1}$ будет $a_{n-1} > 0$, $a_{2n-1} > 0$

Тогда $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} > 0$.

Если в ряду есть следующее число a_{2n}, то среди $n + 1$ чисел $a_n, \ldots, a_{2n}$ первое $a_n > 0$. Но тогда сумма n первых чисел $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n > 0$, что противоречит условию. Значит $a_n < 0$ и $2n$ чисел в ряду невозможно расставить. Максимально возможно $2n - 1$ чисел. При этом $a_n < 0$, а все остальные числа положительны.

Например:

$$\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-1},-2n+1,\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-1}.$$

Здесь $2n - 1$ число. Сумма любых n равна -1, сумма любых $n + 1$ равна 1.

Т.о. условие задачи выполняется при всех $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.При $n = 2$ получаем задачу пункта 1.

3.2n отрицательных чисел и $n + 2$ положительных

Заметим, что если $n = 1$, то $n + 2 = 3$ и тогда $n + 2 \vdots n$. Если $n = 2$, то $n + 2 = 4$ и тогда $n + 2 \vdots n$. Условие задачи в этих случаях невыполнимо.

3.2.1n –четное

Утверждение 3.2. Если n четное число, $n > 2$, сумма любых n подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых $n + 2$ подряд идущих чисел положительна, томаксимальное число чисел в ряду равно $2n - 1$.

Доказательство. Пусть $n > 2$. В каждой последовательности из $n + 2$ чисел сумма первых двух положительна.В самом деле, т.к. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} > 0$, $a_3 + \ldots + a_{n+2} < 0$ то $a_1 + a_2 > 0$.

Из $n + 2$чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+2}$, будет $a_1 + a_2 > 0$.

Из $n + 2$ чисел $a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n+4}$, будет $a_3 + a_4 > 0$ и т.д.

Из $n + 2$ чисел $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, \ldots, a_{2n-2}$, будет $a_{n-3} + a_{n-2} > 0$.

Тогда сумма $n - 2$ чисел $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-2} > 0$.

Если в ряду есть ещё два числа a_{2n-1}, a_{2n}, то из $n + 2$ чисел $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$, будет $a_{n-1} + a_n > 0$. И получим, что сумма n чисел $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n > 0$, что противоречит условию. Значит $2n$ чисел расставить невозможно. В таблице 3.1 приведен пример, показывающий, что $2n - 1$ чисел с указанным свойством существуют.

Таблица 3.1

№	1	2	3	4	…	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	…	$2n-2$	$2n-1$
a_i	$-n$	$n+3$	$-n$	$n+3$	…	$-n$	$n+3$	$-n$	$-\frac{n}{2}+1$	$-n$	$n+3$	$-n$	…	$n+3$	$-n$

Здесь сумма любых n чисел равна -2.Сумма любых $n + 2$ чисел равна 1.

Итак, для любого чётного $n > 2$ возможно максимум $2n - 1$ число в ряду.

3.2.2n –нечетное

Утверждение 3.3. Если n нечетное число, $n > 2$, сумма любых n подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых $n + 2$ подряд идущих чисел положительна, томаксимальное число чисел в ряду равно $2n$.

Доказательство. Пусть $n > 2$. В каждой последовательности из $n + 2$ чисел сумма первых двух положительна(доказательство аналогично как в доказательстве утверждения 3.1).Тогда $a_1 + a_2 > 0$, $a_3 + a_4 > 0$, и т.д.Если в ряду есть $2n - 1$ чисел, то $a_{n-2} + a_{n-1} > 0$.Тогда сумма $n - 1$ чисел $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} > 0$.

Но т.к. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n < 0$, то $a_n < 0$.

Пусть в ряду можно расставить $2n$ чисел. Тогда, рассматривая последовательности из $n + 2$ чисел начиная с a_2 и сдвигая их на два вправо аналогично получим $a_2 + a_3 > 0$, $a_4 + a_5 > 0$, ..., $a_{n-1} + a_n > 0$.

Тогда $a_2 + \cdots + a_n > 0$. Но т.к. сумма n чисел $a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} < 0$, то $a_{n+1} < 0$.

Значит$a_n + a_{n+1} < 0$. Но если предположить, что в ряд можно расставить $2n + 1$ чисел, то для последних $n + 2$ чисел $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n+1}$получим $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} < 0$ (т.к. $a_n + a_{n+1} < 0$ и $a_{n+2} + \ldots + a_{2n+1} < 0$ как сумма n слагаемых), что противоречит условию. Значит,$2n + 1$ чиселс указанным свойством существуют.Пример в таблице 3.2 показывает, что для $2n$чисел это возможно.

Таблица 3.2.

№	1	2	3	4	…	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	…	$2n-1$	$2n$
a_i	$-n$	$n+2$	$-n$	$n+2$	…	$-n$	$n+2$	$-n$	$-n$	$n+2$	$-n$	…	$n+2$	$-n$

Здесь сумма любых n подряд идущих чисел равна -1. Сумма любых $n + 2$ подряд идущих чисел равна 1.

Итак, для любого нечётного $n > 2$ возможно максимум $2n$ чисел.

4 СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ m И n

Пусть сумма любых mподряд идущих чисел отрицательная,сумма любых n подряд идущих чисел положительная. Очевидно $m \neq n$.

В силу следствия 1 должно быть $n \not\,\vdots\, m$. Пусть $n = sm + p$, т.е.p – остаток от деления n на m.

Рассуждаем аналогично, как в предыдущих пунктах.

$$\overbrace{a_1,\dots,a_p,\underbrace{a_{p+1},\dots,a_{p+m}}_{<0},\dots,\underbrace{a_{p+(s-1)m+1},\dots,a_{p+sm}}_{<0}}^{>0}$$

Т.к. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$, и $a_{p+1} + \cdots + a_{p+m} < 0$,…, $a_{n-m+1} + \cdots + a_n < 0$, то $a_1 + \ldots + a_p > 0$, т.е. сумма первых p чисел в любой последовательности подряд идущих n чисел положительна.

4.1 $n = sm + p$, $m \,\vdots\, p$

Утверждение 4.1Еслисумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, $m \,\vdots\, p$, где p– остаток от деления n на mтомаксимальное число чисел в ряду не больше

$$max = n + m - p - 1 \tag{1}$$

Доказательство. Если $m \,\vdots\, p$, то сдвигая $\frac{m}{p} - 2$ раза последовательности из n чисел на p вправо, показываем, что

$$a_{p+1} + \cdots + a_{2p} > 0, \ldots, a_{m-2p+1} + \cdots + a_{m-p} > 0.$$

Значит $a_1 + \cdots + a_{m-p} > 0$.

Если в ряду есть $n + m - p$чисел, то сдвигая последовательности из n чисел еще раз на p вправо, показываем, что $a_{m-p+1} + \cdots + a_m > 0$.

Но тогда $a_1 + \cdots + a_m > 0$,т.е. сумма первых m чисел положительна, то противоречит условию. Значит, максимально возможное количество чисел в ряду не больше (1).

Заметим, что в этом случае $m = qp,\ n = sm + p = (sq + 1)p$. Значит, $p = НОД(m, n)$ и формулу (1) можно переписать в виде $max = m + n - НОД(m, n) - 1$.

4.2 $n = sm + p$, $m = kp + l$, $p \,\vdots\, l$

Утверждение 4.2 Еслисумма любых m подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых n подряд идущих чисел положительна, $n = sm + p$, $m = kp + l$, $p \,\vdots\, l$, где l– остаток от деления m на p томаксимальноеколичество чисел в ряду не больше

$$max = n + m - l - 1 \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $m \not\,\vdots\, p$. Значит $m = kp + l$, т.е. $k = \left[\frac{m}{p}\right]$, l – остаток от деления m на p.

Тогда, если в ряду есть $n + (k - 1)p = n + m - l - p$ чисел, то сдвигая $k - 1$ раз последовательности из n чисел на p вправо, показываем, что

$$a_{p+1} + \cdots + a_{2p} > 0, \ldots, a_{(k-1)p+1} + \cdots + a_{kp} > 0.$$

Значит $a_1 + \cdots + a_{kp} > 0$. Но т.к. $a_1 + \cdots + a_m < 0$, то $a_{m-l+1} + \cdots + a_m < 0$ – здесь l слагаемых.

Если $p \vdots l$, и в ряду есть $n + m - l - p + l\left(\frac{p}{l} - 1\right) = n + m - 2l$ чисел, то сдвигая первоначальный набор из n чисел вправо на l чисел $\frac{p}{l} - 1$ раз, аналогично покажем, что

$a_{m+1} + \cdots + a_{m+l} < 0, \dots, a_{m+p-2l+1} + \cdots + a_{m+p-l} < 0$.

Т.о. $a_{m-l+1} + \cdots + a_{m+p-l} < 0$. Здесь p слагаемых. Но если в ряду есть $m + n - l$ чисел, то для последних n чисел $a_{m-l+1}, \dots, a_{m+n-l}$ сумма первых p должна быть положительной, а у нас получилась отрицательной. Значит $m + n - l$ чисел расставить невозможно. Т.о. максимально возможное количество чисел в ряду не больше (2).

Заметим, что в этом случае $p = ql$, $m = kp + l = (kq+1)l$, $n = sm + p = (s(kp+1)+q)l$. Значит, $l = НОД(m,n)$, и формулу (2) можно переписать в виде $max = m + n - \text{НОД}(m,n) - 1$.

Результат согласуется с пунктами 3.1 и 3.2.

4.3 Случай произвольных m, n

Заметив закономерность в пунктах 4.1 и 4.2, можно выдвинуть

Предложение 1. Максимальное количество чисел в ряду не больше

$$max = m + n - \text{НОД}(m,n) - 1. \qquad (3)$$

В частности, если числа m и n взаимнопростые, то не больше

$$max = m + n - 2. \qquad (4)$$

Продолжая описанный в пунктах 4.1, 4.2 процесс, мы либо получим остаток, на который делится предыдущий остаток, что в силу алгоритма Евклида и означает, что это есть НОД(m, n), либо получим остаток равный 1 (в случае когда НОД(m, n)=1). И на последнем этапе получим противоречие аналогичное предыдущим пунктам. Формулы (3) и (4) ниже проверены на некоторых частных случаях.

Разумеется, в пунктах 4.1, 4.2 доказано лишь ограничение сверху для искомого максимального числа. Построить пример в общем виде, доказывающий, что данный максимум достигается, весьма затруднительно. Поэтому на практике при частных значениях m и nудовлетворяющим условиям пунктов 4.1или 4.2 следует определить максимальное число по формулам (1) или (2) соответственно и привести пример чисел ряда для этого значения max. А для пункта 4.3 следует определить максимальное число по формулам (3) или (4), доказать, что для $max + 1$возникнет противоречие и привести пример для числа max.

Итак, если $m \vdots p$, то $max = n + m - p - 1$;

$$\text{если } m \not\vdots\, p,\ p \vdots l, \text{ где } l = m - kp,\ k = \left[\frac{m}{p}\right], \text{ то } max = n + m - l - 1;$$

$$\text{если } m \not\vdots\, p,\ p \not\vdots\, l, \text{ то } max = m + n - \text{НОД}(m,n) - 1.$$

4.4 Примеры

Пример1. Сумма любых 5 подряд идущих чисел отрицательна. Сумма любых 8 подряд идущих чисел положительна, т.е. $m = 5, n = 8$.

Здесь $p = 3,\ 5 \not\vdots\, 3,\ k = \left[\frac{5}{3}\right] = 1,\ l = 5 - 3 = 2,\ p \not\vdots\, l,\ n + m - 2 = 11.$

$$\overbrace{a_1,a_2,a_3,\underbrace{a_4,a_5,a_6,a_7,a_8}_{<0}}^{>0},a_9,a_{10},a_{11},a_{12},\ldots \Rightarrow \quad a_1+a_2+a_3>0$$

$$a_1,a_2,a_3,\overbrace{a_4,a_5,a_6,\underbrace{a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11}}_{<0}}^{>0},a_{12},\ldots \Rightarrow \quad a_4+a_5+a_6>0$$

$$\overbrace{\underbrace{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}_{<0},a_6}^{>0},a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},\ldots \Rightarrow \quad a_6>0$$

Если в ряду есть 12 чисел, то сдвигая все на 1 вправо, аналогично покажем, что $a_7>0$. Но тогда

$$a_1,a_2,\overbrace{a_3,a_4,a_5,\underbrace{a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}}_{<0}}^{>0},a_{11},a_{12},\ldots \Rightarrow \quad a_3+a_4+a_5>0$$

$$a_1,a_2,\underbrace{a_3,a_4,a_5}_{>0},\underbrace{a_6,a_7}_{>0},a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},\ldots \Rightarrow \quad a_3+a_4+a_5+a_6+a_7>0$$

Получили противоречие, значит возможно максимум 11 чисел. Вот пример.

Таблица 4.1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	19	-30	19	19	-30	19	-30	19	19	-30	19

Здесь сумма любых 5 чисел равна -3, сумма любых 8 чисел равна 5.

Пример2. Сумма любых 5 подряд идущих чисел отрицательна. Сумма любых 9 подряд идущих чисел положительна, т.е. $m=5, n=9$.

Здесь $p=4,\ 5 \not\vdots\, 4,\ k=\left[\frac{5}{4}\right]=1,\ l=5-4=1,\ p \vdots l,\ n+m-2=12.$

$$\overbrace{a_1,a_2,a_3,a_4,\underbrace{a_5,a_6,a_7,a_8,a_9}_{<0}}^{>0},a_{10},a_{11},a_{12},a_{13},\ldots \Rightarrow \quad a_1+a_2+a_3+a_4>0$$

$$\underbrace{\overbrace{a_1,a_2,a_3,a_4}^{>0},a_5}_{<0},a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13},\ldots \Rightarrow \quad a_5<0$$

Сдвигая набор из 9 чисел вправо на 1 число 3 раза аналогично покажем, что $a_6<0, a_7<0, a_8<0$. И тогда $a_5+a_6+a_7+a_8<0$. Если в ряду есть 13 чисел, то

$$a_1,a_2,a_3,a_4,\underbrace{a_5,a_6,a_7,a_8}_{<0},\underbrace{a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13}}_{<0},\ldots$$

И тогда сумма 9 чисел от a_5 до a_{13} отрицательна. Получили противоречие, значит возможно максимум 12 чисел. Вот пример в таблице 4.2.

Таблица 4.2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	-4	-4	-4	15	-4	-4	-4	-4	15	-4	-4	-4

Здесь сумма любых 5 чисел равна -1, сумма любых 9 чисел равна 2.

Пример3. Сумма любых 8 подряд идущих чисел отрицательна. Сумма любых 13 подряд идущих чисел положительна, т.е. $m = 8, n = 13$.

Здесь $p = 5,\ 8 \nmid 5,\ k = \left[\frac{8}{5}\right] = 1,\ l = 8 - 5 = 3,\ p \nmid l,\ n + m - 2 = 19$

$$\overbrace{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\underbrace{a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13}}_{<0}},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5>0$$

$$\overbrace{\underbrace{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8}_{<0},a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13}},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}>0$$

$$\underbrace{\overbrace{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5},a_6,a_7,a_8}_{<0},a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_6+a_7+a_8<0$$

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\overbrace{a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},\underbrace{a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18}}_{<0}},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}>0$$

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\underbrace{\overbrace{a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}},a_{11},a_{12},a_{13}}_{<0},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_{11}+a_{12}+a_{13}<0$$

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,\overbrace{a_9,a_{10},\underbrace{a_{11},a_{12},a_{13}}_{<0}},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_9+a_{10}>0$$

Значит, в любой последовательности из 18 чисел сумма 9-го и 10-го положительна.

$$a_1,a_2,a_3,\overbrace{\underbrace{a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11}}_{<0},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16}},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}>0$$

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,\underbrace{a_9,a_{10},a_{11},\overbrace{a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16}}}_{<0},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_9+a_{10}+a_{11}<0$$

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,\underbrace{\overbrace{a_9,a_{10}},a_{11}}_{<0},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{19},\ldots \Rightarrow \quad a_{11}<0$$

Если в ряду есть 19 чисел, то сдвигая все на 1 число вправо, аналогично показываем, что $a_{12}<0$.

Если в ряду есть 20 чисел, то для 18 чисел от 3-го до 20-го получим что сумма 9-го и 10-го равна $a_{11}+a_{12}<0$, а должно быть положительна. Получили противоречие, значит максимально возможно 19 чисел. Заметим, что это на 1 больше чем $n+m-l$. Пример в таблице 4.3.

Таблица 4.3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_i	-30	49	-30	-30	49	-30	49	-30	-30	49	-30	-30	49	-30	49	-30	-30	49	-30

Здесь сумма любых 8 чисел равна -3, сумма любых 13 чисел равна 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленная на VIII Минском городском открытом турнире юных математиков 2021г. Задача решена полностью. Найдено максимальное количество чисел в ряду при некоторых частных значениях *m*и *n*и в некоторых общих случаях. Доказано, что если увеличить полученное значение *max* на 1, то возникнет противоречие в определении знаков суммы некоторых слагаемых. Замеченные при рассмотрении частных случаев идеи и закономерности были применены дальше при исследовании общих случаев.

Для произвольных *m* и *n*указаны оценки сверху для максимального количества чисел в ряду.Достижимость этих значений *max*на практике необходимо доказывать наличием примера при каждых конкретных значениях *m*и *n*т.к. в общем виде такой пример привести затруднительно.

Правильность формул, полученных для общего случая продемонстрирована на примерах.

Результаты данных исследований могут применяться при подготовке учащихся к математическим олимпиадам, турнирам, при проведении факультативов, а также при дальнейшем исследовании похожих тем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. https://uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html