XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс
научно-исследовательских работ учащихся средних,
средних специальных учебных заведений и студентов вузов
«От Альфа к Омеге…» (с международным участием)
Секция 1. Алгебра, геометрия и математический анализ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Гимназия №6 г. Гродно»

ТЕОРЕМА ВИЕТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Тарасенко Никита Денисович,
учащийся 8 «Г» класса

Селивёрстова Анна Олеговна,
учитель математики
ГУО «Гимназия №6 г. Гродно»,
без категории

Гродно, 2021

ТЕОРЕМА ВИЕТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Н. Д. Тарасенко
ГУО «Гимназия №6 г. Гродно», 8 «Г» класс,
Гродно, Беларусь

Научный руководитель – А. О. Селивёрстова, учитель математики ГУО «Гимназия №6 г. Гродно», без категории.

Работа 12 с., 2 ч., 3 источника.

Ключевые слова:теорема Виета, уравнения третьей степени, уравнения четвертой степени.

Работа посвящена изучению теоремы Виета: её формулировке, доказательству, а также решению задач с применением этой теоремы.

Объектом исследования являютсяуравнения третьей и четвертой степени.

Предметом исследования является теорема Виета как инструмент для решения уравнений.

Цель работы – изучение теоремы Виета для уравнений третьей и четвёртой степени и применение её в алгебраических и геометрических задачах.

В результате исследования:была изучена и доказана теорема Виета для уравнений третьей и четвёртой степени, данная теорема была применена на практике, был решён ряд алгебраических и геометрических задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему. Действительно, уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь и т. д.). В школьном курсе алгебры мы в основном решаем квадратные уравнения, применяя теорему Виета для более быстрого способа нахождения корней. А что же касается уравнений третьей и четвертой степени? Как же находятся их корни с помощью теоремы Виета? В данной работе мы рассмотрим эти вопросы.

Работа посвящена изучению теоремы Виета: её формулировке, доказательству, а также решению задач с применением этой теоремы.

Актуальность темы: применение теоремы Виета является уникальным приемом для решения уравнений третьей и четвёртой степени

Цель исследования: изучение теоремы Виета для уравнений третьей и четвёртой степени и применение её в алгебраических и геометрических задачах.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- подобрать научную литературу;
- провести исследование зависимости коэффициентов уравнений и произведения и суммы их корней;
- научиться доказывать теорему Виета;
- составить уравнения третьей и четвертой степени, решаемые по теореме Виета;
- рассмотреть применение теоремы Виета к решению геометрических задач
- сделать заключение.

Объект исследования: уравнения третьей и четвертой степени.

Предмет исследования: теорема Виета как инструмент для решения уравнений.

Методы исследования: поисковые, аналитические, практические.

1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1.1.Теорема Виета (для квадратного уравнения). Если α_1, α_2 – корни квадратного уравнения

$$b_0x^2+b_1x+b_2=0, \tag{1.1}$$

то справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{b_1}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2=\dfrac{b_2}{b_0}. \end{cases} \tag{1.2}$$

[1, с. 138–139]

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $b_0=1$, то есть квадратное уравнение (1.1)примет вид

$$x^2+b_1x+b_2=0 \tag{1.3}$$

Если числа α_1, α_2являются корнями квадратного уравнения (1.3), то из разложения многочлена по корням, имеем

$$x^2+b_1x+b_2=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

Преобразуем правую часть

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=x^2-x\alpha_1-x\alpha_2+\alpha_1\alpha_2=x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2$$

Таким образом, уравнение (1.3) примет вид

$$x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2=0 \tag{1.4}$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при соответствующих степенях.Из уравнений (1.3) и (1.4) видим, что

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=-b_1, \\ \alpha_1\alpha_2=b_2. \end{cases}$$

Теорема доказана.

1.2 Теорема Виета (для уравнения третьей степени).Если α_1, α_2,α_3– корни уравнения третьей степени

$$b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0, \tag{1.5}$$

то справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\dfrac{b_1}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3=\dfrac{b_2}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\dfrac{b_3}{b_0}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $b_0=1$, то есть уравнение (1.5) примет вид

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0 \tag{1.7}$$

Если числа α_1, α_2,α_3 являются корнями уравнения (1.7), то из разложения многочлена по корням, имеем

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

Преобразуем правую часть (преобразования выполняем в программе maple)

$$\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)(x-\alpha_3)=x^3-(\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Таким образом, уравнение (1.7) примет вид

$$x^3-(\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0 \qquad (1.8)$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при соответствующих степенях.Из уравнений (1.7) и (1.8) видим, что

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\beta_1, \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3=\beta_2, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\beta_3. \end{cases}$$

Теорема доказана.

1.3 Теорема Виета (для уравнения четвертой степени). Если α_1, α_2,α_3,α_4– корни уравнения четвертой степени

$$\beta_0x^4+\beta_1x^3+\beta_2x^2+\beta_3x+\beta_4=0, \qquad (1.9)$$

то справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-\dfrac{\beta_1}{\beta_0}, \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=\dfrac{\beta_2}{\beta_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4=-\dfrac{\beta_3}{\beta_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\dfrac{\beta_4}{\beta_0}. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\beta_0=1$, то есть уравнение (1.9) примет вид

$$x^4+\beta_1x^3+\beta_2x^2+\beta_3x+\beta_4=0, \qquad (1.11)$$

Если числа α_1, α_2,α_3,α_4 являются корнями уравнения (1.11), то из разложения многочлена по корням, имеем

$$x^4+\beta_1x^3+\beta_2x^2+\beta_3x+\beta_4=\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)\left(x-\alpha_3\right)\left(x-\alpha_4\right)$$

Преобразуем правую часть (преобразования выполняем в программе maple)

$$\begin{aligned}\left(x-\alpha_1\right)\left(x-\alpha_2\right)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)=x^4-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3+ \\ +(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)x^2- \\ -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4)x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.11) примет вид

$$\begin{aligned}x^4-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)x^2- \\ -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4)x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=0\end{aligned} \qquad (1.12)$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при соответствующих степенях. Из уравнений (1.11) и (1.12) видим, что

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-\beta_1, \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4=\beta_2, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4=-\beta_3, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\beta_4. \end{cases}$$

Теорема доказана.

1.4 Теорема Виета (обобщенная). Если $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ – корни многочлена

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n, \qquad (1.13)$$

то справедливы следующие равенства

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\dfrac{b_1}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{b_2}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha = -\dfrac{b_3}{b_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha = (-1)^{n-1}\dfrac{b_{n-1}}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{b_n}{b_0}. \end{cases} \qquad (1.14)$$

И рассмотрим обратную теорему Виета для обобщенного случая.

Теорема, обратной теореме Виета (обобщенная). Если числа $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ таковы, что выполняются соотношения

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\dfrac{b_1}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{b_2}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha = -\dfrac{b_3}{b_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha = (-1)^{n-1}\dfrac{b_{n-1}}{b_0}, \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{b_n}{b_0}, \end{cases}$$

то они являются корнями уравнения

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n.$$

2. ПРАКТИЧЕСКАЯЧАСТЬ

Задача 1. Вычислить сумму квадратов корней кубического уравнения $2x^3+3x^2-4x+5=0$

Решение. По теореме Виета для уравнения третьей степени имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3}{2}, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-2, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{5}{2}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Используя тождество $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$, получаем, что

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cdot(-2),$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{25}{4}$$

Значит, сумма квадратов корней кубического уравнения равна $\frac{25}{4}$.

Ответ: $\frac{25}{4}$.

Задача 2.Составитькубическое уравнение, корни которого являются квадратами корней уравнения $x^3+9x^2+7x-4=0$

Решение. По теореме Виета для уравнения третьей степени имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-9, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=7, \\ x_1x_2x_3=4. \end{cases} \tag{2.2}$$

Используя тождество $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$,

[2]

получаем, что

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=67 \tag{2.3}$$

Используя тождество $(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2+2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$, получаем, что

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=121 \tag{2.4}$$

Также возведём в квадрат последнее уравнение из системы (2.2):

$$x_1^2x_2^2x_3^2=16 \tag{2.5}$$

Обозначим корни искомого уравнения через y_1, y_2, y_3, а коэффициенты через a_1, a_2, a_3. Данное уравнение имеет вид

$$y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3=-a_1, \\ y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3=a_2, \\ y_1y_2y_3=-a_3. \end{cases} \tag{2.7}$$

Согласно условию имеем, что $y_1=x_1^2, y_2=x_2^2, y_3=x_3^2$. Значит, система (2.7) примет вид

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2=-a_1, \\ x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=a_2, \\ x_1^2x_2^2x_3^2=-a_3. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Подставляя в систему (2.8) уравнения (2.3), (2.4) и (2.5), получаем

$$\begin{cases} a_1=-67, \\ a_2=121, \\ a_3=-16. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Согласно условиям (2.9), уравнение (2.6) примет вид

$$y^3-67y^2+121y-16=0$$

Ответ: $y^3-67y^2+121y-16=0$

Задача 3.Вычислить сумму квадратов корней уравнения четвёртой степени $3x^4+5x^3-2x^2+8x+1=0$

Решение. По теореме Виета для уравнения третьей степени имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{5}{3}, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4=-\frac{2}{3}, \\ x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4=-\frac{8}{3}, \\ x_1x_2x_3x_4=\frac{1}{3}. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Используя тождество

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4),$$

получаем, что

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(-\frac{2}{3}\right),$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{37}{9}$$

Значит, сумма квадратов корней уравнения четвёртой степени равна $\frac{37}{9}$.

Ответ: $\frac{37}{9}$.

Задача 4.Найдите площадь треугольника, длины сторон которого являются корнями уравнения третьей степени: $x^3-2x^2+9x-4=0$

Решение. По теореме Виета для уравнения третьей степени имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=9, \\ x_1x_2x_3=4. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Для нахождения площади треугольника, будем использовать формулу Герона:

$$S=\sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)}, \qquad (2.12)$$

где $p=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{2}$ – полупериметр, x_1, x_2, x_3–стороны треугольника.

[3]

Из формулы (2.12) преобразуем подкоренное выражение

$$p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)=p(p^3-(x_1+x_2+x_3)p^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)p-x_1x_2x_3)=$$

$$=\frac{x_1+x_2+x_3}{2}\left(\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2}\right)^3-(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2}\right)^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)\frac{x_1+x_2+x_3}{2}-x_1x_2x_3\right) \qquad (2.13)$$

Подставляя в него условия (2.11), получаем

$$p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)=1-2+9-4=4$$

Возвращаясь к (2.12), вычисляем площадь

$$S=\sqrt{4}=2$$

Ответ: 2.

Задача 5. Найдите радиус, вписанной в треугольник окружности, если длины сторон треугольника являются корнями уравнения третьей степени: $2x^3-8x^2+47x-11=0$

Решение. По теореме Виета для уравнения третьей степени имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{47}{2}, \\ x_1x_2x_3=\dfrac{11}{2}. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Используя преобразование (2.13), получаем

$$p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)=2\left(2^3-4\cdot 2^2+\frac{47}{2}\cdot 2-\frac{11}{2}\right)=67$$

Возвращаясь к (2.12), вычисляем площадь

$$S=\sqrt{67}$$

Ответ: $\sqrt{67}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работая над исследованием, была изучена и доказана теорема Виета для уравнений третьей и четвёртой степени.

Теорема Виета была применена на практике. Был решён ряд задач, которые помогли лучше закрепить новый материал.

Работая с учебной литературой и решая подобранные моим учителем задачи, я остался очень доволен результатом своего исследованияибольшим количеством заданий, которые решаются с помощью теоремы Виета.

Представленный материал может быть использован как на уроках математики, так и на факультативных и стимулирующих занятиях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. Учебное пособие для студентов-заочников III—IV курсов физико-математических факультетов педагогических институтов. — М.: Просвещение, 1980.

2. Алгебра: учеб. пособие для 8 кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Е.П. Кузнецова [и др.]; под ред. Л. Б. Шнепермана. — Минск: Нар. асвета, 2015.

3. Шлыков, В. В. Геометрия: учеб. пособие для 8 кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков. — Минск: Нар. асвета, 2011.