XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс научно-исследовательских работ учащихся средних, средних специальных учебных заведений и студентов вузов «От Альфа к Омеге…» (с международным участием)

Секция 1. Алгебра, геометрия и математический анализ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования«Гимназия имени Я.Купалы»

ТРЕУГОЛЬНИК НАИМЕНЬШЕГО ПЕРИМЕТРА И НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВЕ ОКРУЖНОСТИ

Трунина Мария Сергеевна,

учащаяся 9 «Б» класса

Глушкевич Наталья Михайловна,

учитель математики

ГУО «Гимназия имени Я.Купалы»,

высшая кв. категория учителя математики

Мозырь, 2021

ТРЕУГОЛЬНИК НАИМЕНЬШЕГО ПЕРИМЕТРА И НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВЕ ОКРУЖНОСТИ

М.С.Трунина
ГУО «Гимназия имени Я.Купалы», 9 «Б» класс,
Мозырь, Беларусь

Научный руководитель –Н.М.Глушкевич, учитель математики ГУО «Гимназия имени Я.Купалы», высшая кв. категория учителя математики.

Работа 19 с., 6 ч., 9 рис., 5 источников.

Ключевые слова:периметр, площадь, треугольник, окружность.

В работе исследуются две задачи И. Ф. Шарыгина:

Задача №1. Найти наименьшее значение периметров всевозможных треугольников, содержащих две касающиеся внешним образом окружности с радиусом R и r.

Задача №2. Найти наименьший по площади треугольника, содержащий две равные касающиеся окружности R.

Чтобы справиться с решением этих задач пришлось предварительно решить опорные задачи, изучить и исследовать литературу по данной теме.

Предметом исследования являются нахождение наименьшего значение периметра и площади треугольника, который содержит две окружности.

Задачи исследования:

1. Исследовать и изучить литературу по теме «Окружность и треугольник»
2. Отбор и классификация исследуемого материала
3. Провести исследование и нахождение наименьшего периметра треугольника, в зависимости расположения окружностей в данной треугольнике, и соотношение между радиусами меньшей и большей окружности
4. Провести исследование и нахождение площади треугольника, содержащего две равные окружности радиуса R.

При решении задачи №1 рассматривались три варианта расположения окружностей в треугольнике, в зависимости от соотношения между радиусами меньшей и большей окружностей.

В результате получим

1) если $\frac{R}{2} \le r \le R$, то наименьший периметр равен $16 \cdot \sqrt{R \cdot r}$.
2) если $\frac{R}{3} \le r < \frac{R}{2}$, то наименьший периметр равен $\frac{4 \cdot R^2 \cdot \sqrt{R \cdot r}}{(R-r) \cdot r}$.
3) если $r < \frac{R}{3}$, то периметр равен $6 \cdot R \cdot \sqrt{3}$.

В решении задачи №2, анализируя условия, мы выяснили, что искомый минимальный треугольник должен быть выбран из двух:

1) если одна из сторон касается обеих окружностей, а каждая из двух оставшихся касается одной окружности и делится точкой касания пополам.

2) если две стороны треугольника касаются одной окружности и делится точкой касания пополам.

Наименьшее значение площади треугольника оказалось равно $(6+4\cdot\sqrt{2})\cdot R$, в первом случае. Во втором случае площадь получившегося экстремального треугольника ($S = \frac{R^2 \cdot (3\sqrt{17}-5) \cdot \sqrt{22+6\sqrt{17}}}{4}$), больше чем в первом случае ($S=(6+4\cdot\sqrt{2})\cdot R$).

Следует отменить, что данная работа будет полезна для учащихся, интересующихся математикой, занимающихся математикой при подготовке к олимпиадам, экзаменам и ЦТ.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Окружность и треугольник. Каково многообразие задач, и каждая задача интереснее другой. Меня заинтересовали две задачи И. Ф. Шарыгина:

Задача №1. Найти наименьшее значение периметров всевозможных треугольников, содержащих две касающиеся внешним образом окружности с радиусом R и r.

Задача №2. Найти наименьший по площади треугольника, содержащий две равные касающиеся окружности R.

Чтобы справиться с решением этих задач пришлось предварительно решить опорные задачи, изучить и исследовать литературу по данной теме.

Предметом исследования являются нахождение наименьшего значение периметра и площади треугольника, который содержит две окружности.

Задачи исследования:

1. Исследовать и изучить литературу по теме «Окружность и треугольник»
2. Отбор и классификация исследуемого материала
3. Провести исследование и нахождение наименьшего периметра треугольника, в зависимости расположения окружностей в данной треугольнике, и соотношение между радиусами меньшей и большей окружности
4. Провести исследование и нахождение площади треугольника, содержащего две равные окружности радиуса R.

Следует отменить, что данная работа будет полезна для учащихся, интересующихся математикой, занимающихся математикой при подготовке к олимпиадам, экзаменам и ЦТ.

1.ЗАДАЧА НА ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВНУТРИ ТРЕУГОЛЬНИКА, ТАК ЧТОБЫ ПЕРИМЕТР ТРЕУГОЛЬНИКА БЫЛ НАИМЕНЬШИЙ

При решении задачи о нахождении наименьшего значения периметров всевозможных треугольников, содержащих две касающиеся внешним образом окружности с радиусами R и r мы будем опираться в качестве лемма на утверждение, которое получим в решении следующей задачи.

Итак, решим следующую задачу:Дан угол и окружность внутри его. Провести касательную к окружности такую, чтоб отсекаемый от угла треугольник содержал окружность и имел наименьший периметр.

Решим данную задачу.

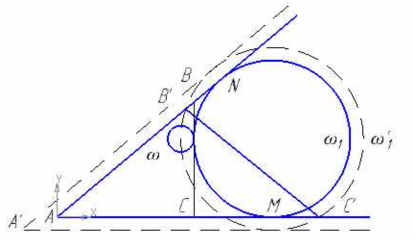

Рис. 1

Пусть ω – данная окружность. Впишем в угол окружности ω_1 , касающуюся окружность ω так, как показано на рисунке 1.

Тогда общая касательная АВ к окружностям ω и ω_1 отсекает от угла требуемый треугольник АВС.

Окружность ω_1 является в не вписанной для треугольника АВС и отрезки касательные проведенные к этой окружности из вершины А равны полупериметру треугольника АВС. То есть АМ=AN=$P_{\Delta ABC}$, где Р полупериметр треугольника АВС.

Для любой другой касательной к окружности ω-B'C', вневписанная окружность треугольника АВ'С' будет располагаться дальше от вершины А, а следовательно треугольник АВ'С' будет иметь периметр больше, чем треугольник АВС.

Для построения окружности ω_1 воспользуемся известным приемом «расширения окружности». Рассмотрим угол с вершиной А' , стороны которого параллельны сторонам данного угла и удаленны от них на расстояние, равное радиусу данной окружности ω. Окружность ω_1' , концентрическая окружности ω_1 и проходящая через центр окружности ω, будет касаться сторон угла с вершиной А'. Следовательно, окружность ω_1' можно построить, а затем построить и окружность ω_1.

Таким образом, если внутри угла расположена окружность, к которой проводятся всевозможные касательные, отсекающие треугольники, содержащие эту окружность, то наименьший периметр будетиметь тот треугольник, у которого вневписанная окружность касается данной (рис. 2).

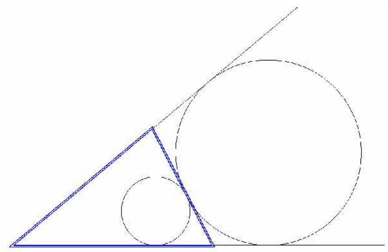

Рис. 2

2.РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ НАИМЕНЬШЕГО ПЕРИМЕТРА ТРЕУГОЛЬНИКА, СОДЕРЖАЩЕГО ДВЕ ОКРУЖНОСТИ, ЕСЛИ $\frac{R}{2} \leq r \leq R$

Пусть стороны треугольника ABC касаются окружностей в четырех точках. Вневписанные окружности треугольника ABC, соответствующими сторонам AB и BC, касаются сторон AB и BC.

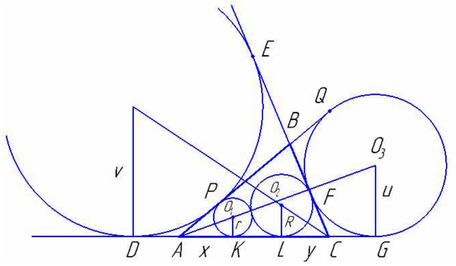

Рис. 3

Пусть AK=x, LC=y. По свойству отрезков касательных к окружности AD=AP=x; EF=DL=AD+AK+KL= AP+AK+KL=2·x+KL.

Аналогично PQ=KG=KL+LC+CG=KL+LC+CF= KL+2·y.

А поскольку EF=PQ, то 2·x+KL= KL+2·y, x=y.

Если в угол вписаны две касающиеся окружности радиусами r и R, то длина отрезка между точками касания равна $2 \cdot \sqrt{r \cdot R}$. В нашей задаче,

KL=$2 \cdot \sqrt{r \cdot R}$, где r и R радиусы окружностей вписанные в треугольник ABC.

Пусть u и v- радиусы вневписанных окружностей,

LG=LC+CG=LC+CF, LC=FC, то имеем LG=2·y=$2 \cdot \sqrt{R \cdot u}$, (1)

DK=AK+DA=AK+AP, AP=AD, тоимеем DK=2·x=$2 \cdot \sqrt{r \cdot v}$, (2)

Из равенств (1) и (2) выразим радиусы вневписанных окружностей

$u = \frac{y^2}{R}$, $v = \frac{x^2}{r}$, но так как x=y, то $u = \frac{x^2}{R}$, $v = \frac{x^2}{r}$.

Треугольники AO_1K и AO_3G подобны, так как угол < O_3AG общий, < AKO_1=<AGO_3=90° (по свойству касательной).

Таким образом

$\frac{AK}{r} = \frac{AG}{u}$, AG=AK+KL+LC+CG=x+$2 \cdot \sqrt{r \cdot R}$+y+y=3·x+$2 \cdot \sqrt{r \cdot R}$.

$\frac{x}{r} = \frac{3 \cdot x + 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}}{u}$ из данной пропорции найдем значение x.

$$\frac{x}{r} = \frac{3 \cdot x + 2 \cdot \sqrt{r \cdot R}}{\frac{x^2}{R}}$$

$$\frac{x^3}{R} = 3 \cdot x \cdot r + 2 \cdot r \cdot \sqrt{r \cdot R}$$

$$x^3 = 3 \cdot x \cdot r \cdot R + 2 \cdot r \cdot R \cdot \sqrt{r \cdot R}$$

$$x^3 - 3 \cdot R \cdot r \cdot x - 2 \cdot (R \cdot r)^{3/2} = 0$$

$$x^3 - 4 \cdot R \cdot r \cdot x + R \cdot r \cdot x - 2 \cdot (R \cdot r)^{3/2} = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 4 \cdot R \cdot r) + R \cdot r \cdot (x - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}) = 0$$

$$x \cdot (x - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}) \cdot (x + 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}) + R \cdot r \cdot (x - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}) = 0$$

$$(x - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}) \cdot (x^2 + 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \cdot x + R \cdot r) = 0$$

$$x - 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} = 0 \text{ или } x^2 + 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} \cdot x + R \cdot r = 0$$

$$x = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} (x + \sqrt{R \cdot r})^2 = 0$$

$$x = -\sqrt{R \cdot r}$$

Не удовлетворяют условию задачи.

Таким образом, $x = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$.

Периметр треугольника ABC равен 2·AG (как было доказано в п. 1).

P_{ABC}=2·AG, где P_{ABC}- периметр треугольника ABC.

Но длина отрезка AG равна $3 \cdot x + 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$,

$AG = 3 \cdot x + 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} + 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} = 8 \cdot \sqrt{R \cdot r}$,

Значит, $P_{ABC}=16 \cdot \sqrt{R \cdot r}$.

Рассматривая этот случай, мы предполагаем, что касательные к окружностям радиусами r и u не пересекает окружность радиуса R (считается, что r≤R).

Это приводит к условию $\frac{r}{x} \geq \frac{R}{AL}$, но так как

AL=AK+KL= x+$2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$=$2 \cdot \sqrt{R \cdot r} + 2 \cdot \sqrt{R \cdot r} = 4 \cdot \sqrt{R \cdot r}$

$\frac{r}{x} \geq \frac{R}{4 \cdot \sqrt{R \cdot r}}$,

$\frac{r}{2 \cdot \sqrt{R \cdot r}} \geq \frac{R}{4 \cdot \sqrt{R \cdot r}}$,

$r \geq \frac{R}{2}$.

Итак, если $\frac{R}{2} \leq r < R$, то наименьший периметр равен $16 \cdot \sqrt{R \cdot r}$.

3.СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ РАДИУСАМИ МЕНЬШЕЙ И БОЛЬШЕЙ ОКРУЖНОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Пусть треугольник ABC – правильный и две стороны касаются данных окружностей.

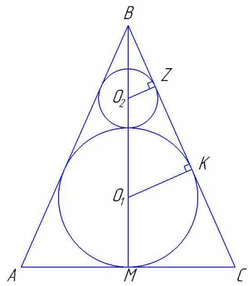

Рис. 4

Найдем соотношение между радиусами R и r, где R –радиус большой окружности, r– радиус малой окружности.

ΔBKO_1– прямоугольный ($<BKO_1=90°$ по свойству касательной).

Δ $O_1BK=30°$, BM - биссектриса, медиана высота равностороннего треугольника.

$BO_1=2\cdot O_1K=2\cdot R$ (по свойству катета прямоугольного треугольника, противоположному углу в 30°).

Аналогично, $BO_2=2\cdot r$ (из треугольника ΔBZO_2).

Тогда $BO_1= BO_2+O_2O_1$,

$2\cdot R=2\cdot r+R+r$

$R=3\cdot r$, $r = \frac{R}{3}$.

Это идеальный вариант, когда стороны треугольника касаются обеих окружностей.

В связи с этим возможны следующие варианты:

1. Если $r < \frac{R}{3}$, в этом случае искомым является правильный треугольник, описанный около большой окружности.

2. Если $\frac{R}{3} \leq r < \frac{R}{2}$, то искомым является равнобедренный треугольник, его боковые стороны касаются данных окружностей.

4.РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ НАИМЕНЬШЕГО ПЕРИМЕТРА ТРЕУГОЛЬНИКА, СОДЕРЖАЩЕГО ДВЕ ОКРУЖНОСТИ, ЕСЛИ $r < \frac{R}{3}$

Пусть $r < \frac{R}{3}$. В этом случае искомый треугольник будет правильным, описанным около большой окружности.

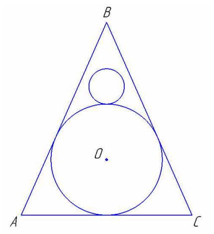

Рис. 5

Найдем в этом случае наименьшее значение периметра данного треугольника. Так как большая окружность радиуса R является вписанной в правильный треугольник, то $R = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, где а сторона данного правильного треугольника.

Тогда $a = 2\sqrt{3} \cdot R$.

Периметр треугольника АВС равен

$P_{ABC}=3 \cdot a=3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot R = 6\sqrt{3} \cdot R$.

Таким образом, если $r < \frac{R}{3}$, то искомым является правильный треугольник, описанный около большой окружности, и наименьшее значение периметра треугольника равно $P=6\sqrt{3} \cdot R$.

5.РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАХОЖДЕНИИ НАИМЕНЬШЕГО ПЕРИМЕТРА ТРЕУГОЛЬНИКА, СОДЕРЖАЩЕГО ДВЕ ОКРУЖНОСТИ, ЕСЛИ $\frac{R}{3} \le r < \frac{R}{2}$

Пусть $\frac{R}{3} \le r < \frac{R}{2}$. В этом случае искомый треугольник является равнобедренным, его боковые стороны касаются данных окружностей.

Найдем наименьшее значение периметра ΔABC.

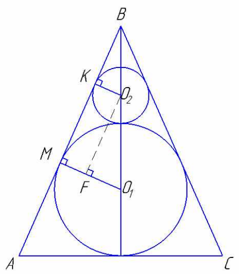

Рис. 6

r иR –радиусы малой и большой окружностей, с центрами O_2 и O_1.

Точки К и М точки касания данных окружностей с боковой стороной АВ.

$KM = 2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$; $O_1O_2=R+r$;

$FO_1=MO_1 - MF= MO_1- KO_2 =R-r$, $O_2F||KM$, $O_2F=KM=2 \cdot \sqrt{R \cdot r}$,$O_1O_2=R+r$

где $<FO_2O_1=< MBO_1$–как соответствующие при параллельных прямых MB, FO_2 и секущей BO_1 .

Δ O_2FO_1 -прямоугольный ($<O_2FO_1=90°$).

$tgFO_2O_1 = \frac{FO_1}{FO_2} = \frac{R-r}{2\cdot\sqrt{R\cdot r}}$;

$sinFO_2O_1 = \frac{FO_1}{O_1O_2} = \frac{R-r}{R+r}$.

$tgMBO_1 = tgFO_2O_1 = \frac{R-r}{2\cdot\sqrt{R\cdot r}}$;

$sinMBO_1 = sinFO_2O_1 = \frac{FO_1}{O_1O_2} = \frac{R-r}{R+r}$.

Δ MBO_1 -прямоугольный.

$\sin MBO_1 = \frac{MO_1}{BO_1}$, $BO_1 = \frac{MO_1}{\sin MBO_1} = \frac{R}{\frac{R-r}{R+r}} = \frac{R\cdot(R+r)}{R-r}$,

ВК- высота равнобедренного треугольника ΔABC.

$$BK = BO_1 + O_1K = \frac{R\cdot(R+r)}{R-r} + R = \frac{R^2 + R\cdot r + R^2 - R\cdot r}{R-r} = \frac{2\cdot R^2}{R-r}$$

Найдем АК из прямоугольного треугольника АКВ.

$$\text{АК} = \text{ВК} \cdot tg < ABK = \frac{2\cdot R^2}{R-r} \cdot \frac{R-r}{2\cdot\sqrt{R\cdot r}} = \frac{R^2}{\sqrt{R\cdot r}}$$

Площадь треугольника АВС равна

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AK \cdot BK = \frac{R^2}{\sqrt{R\cdot r}} \cdot \frac{2\cdot R^2}{R-r} = \frac{2\cdot R^4}{\sqrt{R\cdot r}\cdot(R-r)} =$$

$$= \frac{2\cdot R^4\cdot\sqrt{R\cdot r}}{R\cdot r\cdot(R-r)} = \frac{2\cdot R^3\cdot\sqrt{R\cdot r}}{r\cdot(R-r)}$$

Если в треугольнике вписана окружность радиуса R, то периметр данного треугольника найдем по формуле

$$P = \frac{2\cdot S}{R} = \frac{2\cdot 2\cdot R^3\cdot\sqrt{R\cdot r}}{R\cdot r\cdot(R-r)} = \frac{4\cdot R^2\cdot\sqrt{R\cdot r}}{r\cdot(R-r)}$$

Таким образом, если радиус окружностей R и r находятся в отношении $\frac{R}{3} \le r < \frac{R}{2}$, то наименьшее значение периметра данного треугольника равно $\frac{4\cdot R^2\cdot\sqrt{R\cdot r}}{(R-r)\cdot r}$.

6. ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА, СОДЕРЖАЩЕГО ДВЕ РАВНЫЕ КАСАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ

Пусть даны две равные касающиеся окружности радиусом R. Найти наименьшей по площади треугольника, содержащий данные окружности.

Докажем сначала вспомогательные утверждения.

Рис. 7

Рассмотрим угол с вершиной O, внутри которого расположена окружность. Проведем к ней касательную пересекающую сторону угла в точках K и L, такую что треугольник OKL содержит данную окружность. Точка M-точка касания. Тогда треугольник OKL имеет наименьшую площадь, если M-середина KL.

Для доказательства проведем касательную K_1L_1. $KL\Omega K_1L_1=P$. Возьмем на K_1L_1 точку F такую что , KFпараллельна OL.

Имеет $S_{PKK1}>S_{PKF}>S_{PLL1}$.

Значит, площадь ΔOK_1L_1 больше ΔOKL.

Утверждение доказано.

На основании доказанного утверждения сделаем вывод, что искомый минимальный треугольник должен быть выбран среди следующих двух:

1. Одна из его сторон касается обеих окружностей, а каждая из двух оставшихся касается одной окружности и делится точкой касания пополам.

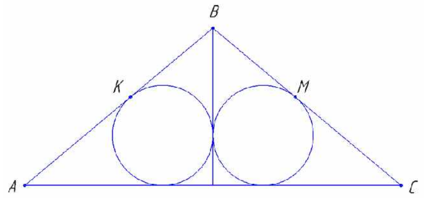

Рис. 8

Из этого следует, что искомый треугольник равнобедренный, AB=BC. Если точки K и M –точки касания на AB и BC, то высота BD, проведенная к AC, в 2 раза больше как расстояние от K до AC, так и расстояния от M до AC, то есть эти расстояния равны.

В прямоугольном треугольнике ABD вписанная окружность касается гипотенузы в ее середине. Значит, этот треугольник равнобедренный AD=BD, AB=AD$\cdot\sqrt{2}$. Найдем катеты этого треугольника

$R=\frac{\mathrm{AD+BD-AB}}{2}$, 2·R=2·AD -$\sqrt{2}$·AD, $\mathrm{AD}=\frac{2\cdot \mathrm{R}}{2-\sqrt{2}}$, или $\mathrm{AD}=\mathrm{R}\cdot(2+\sqrt{2})$.

Площадь треугольника ABC равна

$S_{\mathrm{ABC}}=2\cdot S_{\mathrm{ADB}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AD}^2=\left(\mathrm{R}\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^2=(6+4\sqrt{2})\cdot R^2.$

Таким образом, в этом случае площадь минимального треугольника равна $(6+4\sqrt{2})\cdot R^2$.

2. Рассмотрим второй случай, когда две стороны касаются одной окружности и точкой касания делятся пополам.

В этом случае ΔABC – равнобедренный, BD- высота ΔABC; BA=2·BM. Пусть BO=x, тогда из прямоугольного треугольника BMO_1 (<BMO_1=90°).

$BM = \sqrt{BO^2 - MO^2}$,
$BM = \sqrt{x^2 - R^2}$,
BD=BO+OD,   BD=x+3·R, R - радиус данных окружностей.

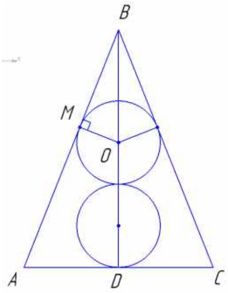

Рис. 9

Из подобия треугольников BOM и BAD имеем

$\frac{BO}{BA} = \frac{OM}{AD} = \frac{BM}{BD}$,

$\frac{x}{2\cdot\sqrt{x^2-R^2}} = \frac{R}{AD} = \frac{\sqrt{x^2-R^2}}{x+3\cdot R}$, (1)

$\frac{x}{2\cdot\sqrt{x^2-R^2}} = \frac{\sqrt{x^2-R^2}}{x+3\cdot R}$,

$x \cdot (x + 3 \cdot R) = 2 \cdot (\sqrt{x^2 - R^2})^2$,

$x^2 + 3 \cdot R \cdot x = 2 \cdot x^2 - 2 \cdot R^2$,

$x^2 - 3 \cdot R \cdot x - 2 \cdot R^2 = 0$,

$D = 9 \cdot R^2 + 8 \cdot R^2 = 17 \cdot R^2$,

$x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot R$, или $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \cdot R$ (не удовлетворяет условию задачи).

Значит, BO $= \frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot R$. Тогда$BD = x + 3 \cdot R = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot R + 3 \cdot R = R \cdot (\frac{9+\sqrt{17}}{2})$.

Далее из пропорции (1) найдем AD

$$AD = \frac{2 \cdot R \cdot \sqrt{x^2 - R^2}}{x}$$

$$AD = \frac{2 \cdot R \cdot \sqrt{(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot R)^2 - R^2}}{\frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot R} = \frac{2 \cdot R \cdot \sqrt{(\frac{3+\sqrt{17}}{2})^2 - 1}}{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot R \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{17})^2 - 4}}{3 + \sqrt{17}} = \frac{2 \cdot R \cdot \sqrt{22 + 6\sqrt{17}}}{3 + \sqrt{17}}$$

Следовательно, площадь треугольника ABC будет равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AD \cdot BD.$$

$$S_{ABC} = \frac{2 \cdot R \cdot \sqrt{22 + 6\sqrt{17}}}{3 + \sqrt{17}} \cdot R \cdot \frac{9 + \sqrt{17}}{2} = \frac{R^2 \cdot \left(9 + \sqrt{17}\right) \cdot \sqrt{22 + 6\sqrt{17}}}{3 + \sqrt{17}} =$$

$$= \frac{R^2 \cdot \left(9 + \sqrt{17}\right) \cdot \left(\sqrt{17} - 3\right) \cdot \sqrt{22 + 6\sqrt{17}}}{\left(3 + \sqrt{17}\right) \cdot \left(\sqrt{17} - 3\right)} = \frac{R^2 \cdot \left(6\sqrt{17} - 10\right) \cdot \sqrt{22 + 6\sqrt{17}}}{8}$$

$$S = \frac{R^2 \cdot \left(3\sqrt{17} - 5\right) \cdot \sqrt{22 + 6\sqrt{17}}}{4}$$

Сравним значения площадей треугольников полученных в первом и втором случае$S_1 = (6+4\cdot\sqrt{2})\cdot R^2$ и

$S_2 = \frac{R^2 \cdot (3\sqrt{17}-5)\cdot\sqrt{22+6\sqrt{17}}}{4}$. При возведении в квадрат значений (6+4·$\sqrt{2}$) и $\frac{(3\sqrt{17}-5)\cdot\sqrt{22+6\sqrt{17}}}{4}$, получим (68+48·$\sqrt{2}$) и $\frac{107+51\cdot\sqrt{17}}{4}$.

(68+48·$\sqrt{2}$) $<\frac{107+51\cdot\sqrt{17}}{4}$.

Таким образом, получим, что если в треугольнике содержатся две равные окружности радиуса R, то наименьшее значение площади данного треугольника будет равно: (6+4·$\sqrt{2}$)·R.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа содержала две задачи:

1. Найти наименьшее значение периметров всевозможных треугольников, содержащих две касающихся внешним образом окружности с радиусами R и r.

2. Найти наименьшее значение площади треугольника, содержащих две равные касающихся окружности с радиусами R.

При решении задачи №1 рассматривались три варианта расположения окружностей в треугольнике, в зависимости от соотношения между радиусами меньшей и большей окружностей.

В результате получим

1) если $\frac{R}{2} \leq r \leq R$, то наименьший периметр равен $16 \cdot \sqrt{R \cdot r}$.

2) если $\frac{R}{3} \leq r < \frac{R}{2}$, то наименьший периметр равен $\frac{4 \cdot R^2 \cdot \sqrt{R \cdot r}}{(R-r) \cdot r}$.

3) если $r < \frac{R}{3}$, то периметр равен $6 \cdot R \cdot \sqrt{3}$.

В решении задачи №2, анализируя условия мы выяснили, что искомый минимальный треугольник должен быть выбран из двух:

1) если одна из сторон касается обеих окружностей, а каждая из двух оставшихся касается одной окружности и делится точкой касания пополам.

2) если две стороны треугольника касаются одной окружности и делится точкой касания пополам.

Наименьшее значение площади треугольника оказалось равно (6+4·$\sqrt{2}$)·R, в первом случае. Во втором случае площадь получившегося экстремального треугольника($S = \frac{R^2 \cdot (3\sqrt{17}-5) \cdot \sqrt{22+6\sqrt{17}}}{4}$) ,больше чем в первом случае (S=(6+4·$\sqrt{2}$)·R).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шарыгин, И. Ф. Задачи по геометрии: планиметрия.-М.: Наука 1986.
2. Кушнир, И.А. Альтернативные способы решения задач (Геометрия).-Киев: Факт, 2006.
3. Просолов, В. В. Задачи по планиметрии. В 2-х ч.-М.: Наука 1991.
4. Дорофеев, Г. В., Шарыгин И. Ф. Олимпиадные задачи и математика в школе.-М.: 1990 №1, №2, №3, №4.
5. Кушнир, И. А. Геометрия. Поиск и вдохновение. Москва: МЦНМО, 2013.