XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс научно-исследовательских работ учащихся средних, средних специальных учебных заведений и студентов вузов «От Альфа к Омеге…» (с международным участием)
Секция 1. Алгебра, геометрия и математический анализ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Государственное учреждение образования «Средняя школа № 8 г. Гомель»

СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ТАБЛИЦАХ

Угнич Никита Дмитриевич,
учащийся 9 «А» класса

Симоненко Дмитрий Николаевич,
старший преподаватель
кафедры высшей математики
учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Гомель, 2021

СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ТАБЛИЦАХ

Н. Д. Угнич
ГУО «Средняя школа № 8 г. Гомеля», 9 «А» класс,
Гомель, Беларусь

Научный руководитель – Д. Н. Симоненко, старший преподаватель кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Работа 34 с., 3 ч., 26 рис., 2 источника, 1 прил.

Ключевые слова: прямоугольная таблица, шестиугольная таблица, сумма чисел в таблице, произведение чисел в таблице, система уравнений.

В работе исследуются прямоугольные таблицы, у которых сумма чисел во всех строках и во всех столбцах одинакова. Таблицы разбиваются на несколько частей, в некоторых из этих частей указывается сумма чисел и находится сумма чисел во всей таблице. Идея работы взята с XXII Республиканского турнира юных математиков, но подобные задачи встречались и раньше, например, на Гомельском областном турнире юных математиков или на Минской городской математической олимпиаде младших школьников. Сама идея по части восстановить целое не нова. За основу взята задача с РТЮМа, как наиболее полная из задач такой тематики. В ней рассматривались квадратные и шестиугольные таблицы произвольных размеров. В данной работе рассмотрены также прямоугольные таблицы $m \times n$. Кроме суммы чисел в таблице рассмотрены произведения чисел в таблице. Также рассмотрены другие способы разбиения таблицы на части.

Объектом исследования являются прямоугольные и шестиугольные таблицы. В первом разделе изучаются прямоугольные таблицы с одинаковой суммой чисел в строках и одинаковой суммой чисел в столбцах. Во втором шестиугольные таблицы с одинаковой суммой чисел в строках. В третьем разделе рассматриваются прямоугольные таблицы с одинаковым произведением чисел в строках и в столбцах.

Цель работы – нахождение суммы чисел во всей таблице, а в третьем разделе произведения и установления условий, при которых это можно проделать.

Работа посвящена решению и обобщению задачи XXII Республиканского турнира юных математиков.

В результате исследования впервые была полностью решена предложенная на турнире юных математиков задача 4 «Суммы в таблицах», а также предложены и решены сразу несколько ее обобщений. Так первые два пункта этой задачи были обобщены на случай прямоугольной таблицы в подразделах 1.1 и 1.3 соответственно. Также в разделе 3 рассмотрено и решено обобщение этих пунктов задачи на случай, когда вместо суммы элементов в таблице рассматривается их произведение. Результаты подраздела 3.1 предлагались еще на самом турнире. А результаты, полученные в подразделе 3.2, найдены были позже и предлагались уже на XXV республиканский конкурс работ исследовательского характера (конференция) учащихся по астрономии, биологии, информатике, математике, физике, химии. Результаты, найденные в подразделах 1.2 и 1.4, являются новыми и нигде ранее не представлялись.

Для нахождения суммы или произведения чисел в таблице составлялась система уравнений. Для доказательства того, что указанных условий достаточно, строился пример таблицы с указанными условиями. Особый интерес эти примеры имеют в подразделе 1.4 и в разделе 2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
1. Нахождение суммы чисел в прямоугольных таблицах 5
  1.1 Разбиение таблицы на четыре части 5
  1.2 Разбиение таблицы на шесть частей 8
  1.3 Разбиение таблицы на девять частей 11
  1.4 Разбиение таблицы на двенадцать частей 14
2. Нахождение суммы чисел в шестиугольных таблицах 19
  2.1 Шестиугольные таблицы 19
  2.2 Сумма чисел в шестиугольных таблицах 21
3. Обобщение для таблиц с произведениями элементов 26
  3.1 Произведение чисел в прямоугольной таблице, разбитой на четыре части 26
  3.1 Произведение чисел в прямоугольной таблице, разбитой на девять частей 28
Заключение 32
Список используемых источников 33
Приложения 34

ВВЕДЕНИЕ

На XXII Республиканском турнире юных математиков, который состоялся в декабре 2020 г. предлагалась для рассмотрения задача 4 «Суммы в таблицах» [1]. Подробнее условие этой задачи приведено в приложении А. В ней предлагалось рассмотреть квадратные таблицы $n \times n$, в которых суммы чисел во всех строках и во всех столбцах таблицы одинаковые. Затем указывалась сумма чисел внутри некоторых частей таблицы и требовалось найти сумму чисел во всей таблице. Далее подобное проделывалось уже с шестиугольной таблицей.

Подобные задачи встречались и раньше. Так, например, в сборнике задач Минской городской математической олимпиады младших школьников [2] можно найти задачи 195 и 198, которые являются подпунктами задачи с РТЮМа. Также подобная задача рассматривалась на областном турнире юных математиков в Гомельской области. Так что задача является достаточно актуальной и интересной для рассмотрения.

Решению и обобщению задачи 4 с XXII РТЮМа и посвящена данная работа. Первая идея при обобщении была в том, чтобы рассматривать сразу не квадратные таблицы $n \times n$, как в первых двух пунктах задачи, а прямоугольные таблицы с m строками и n столбцами, то есть $m \times n$. Вторая идея обобщения – это рассматривать произведения чисел в таблице вместо суммы. Также в данной работе рассматриваются задачи, аналогичные турнирной, в которых таблица разбивается на другое число частей.

1. НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ ЧИСЕЛ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТАБЛИЦАХ

1.1 Разбиение таблицы на четыре части

В приложении А приведено условие задачи 4 «Суммы в таблицах», которая предлагалась на XXII Республиканском турнире юных математиков [1]. В первом пункте этой задачи квадратная таблица разбивалась на четыре части, сумма в двух из которых была задана, и требовалось найти сумму чисел во всей таблице. В работе эта идея развивается дальше и рассматривается уже не квадратная, а прямоугольная таблица. Таким образом, мы приходим к следующей задаче.

Задача 1.1. Обозначим a_{ij} – число, записанное в i-ой строке и j-ом столбце таблицы $m \times n$. При этом известно, что суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые. Кроме того, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\right) = A$ и $\sum_{i=k+1}^{m}\left(\sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}\right) = B$. Выясните, при каких m, n, k, l, A и B это возможно и найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от m, n, k, l, A и B. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

Решение. Сначала предположим, что такая таблица существует, и найдем ограничения, которые при этом накладываются на числа m, n, k, l, A и B. Сразу обратим внимание, что n, m, k и l – натуральные числа, причем $k < m$, $l < n$. Иначе невозможно говорить о сумме чисел в каких-то частях таблицы. Теперь по условию сумма чисел в левом верхнем прямоугольнике $k \times l$ этой таблицы равна A, а сумма чисел в правом нижнем прямоугольнике $(m–k) \times (n–l)$ этой таблицы равна B. Обозначим для удобства сумму чисел в правом верхнем прямоугольнике $k \times (n–l)$ этой таблицы через X, как показано на рисунке 1.1.

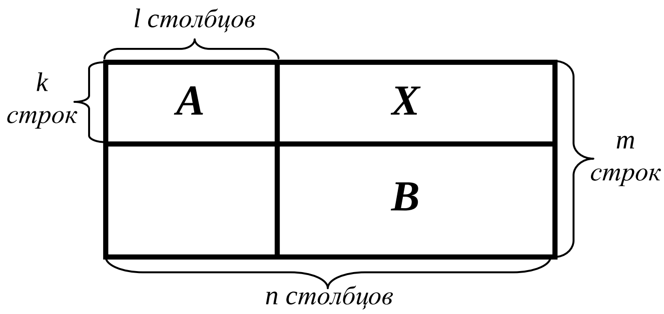


Рисунок 1.1 – Таблица, разбитая на 4 части

Пусть S – сумма чисел во всей таблице. Тогда, так как суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые, то $\frac{S}{m}$ – сумма чисел в одной строке, $\frac{S}{n}$ – сумма чисел в одном столбце. Тогда сумма чисел в k верхних строках таблицы равна с одной стороны $A + X$, а с другой $k \cdot \frac{S}{m}$. Получили равенство $A + X = k \cdot \frac{S}{m}$. Аналогично, суммируя числа в $(n–l)$ правых столбцах, получаем другое равенство $B + X = (n - l) \cdot \frac{S}{n}$. Объединим эти два равенства в систему.

$$\begin{cases} A + X = k \cdot \dfrac{S}{m}; \\ B + X = (n - l) \cdot \dfrac{S}{n}. \end{cases} \qquad (1.\ 1)$$

Вычтем из второго равенства системы (1.1) первое и получим $B - A = (n - l)\cdot\frac{S}{n} - k\cdot\frac{S}{m}$. Таким образом, имеем линейное уравнение $S\cdot(1 - \frac{l}{n} - \frac{k}{m}) = B - A$ для нахождения *S*. Далее возможны два случая.

Если $\frac{l}{n} + \frac{k}{m} \neq 1$, то несложно выразить $S = (B - A)\Big/(1 - \frac{l}{n} - \frac{k}{m})$. После преобразования, в этом случае получаем формулу для нахождения суммы чисел в таблице.

$$S = \frac{mn(B - A)}{mn - ml - nk}. \tag{1.2}$$

Для того, чтобы доказать, что в этом случае такие таблицы существуют, приведем пример заполнения таблицы (см. рисунок 1.2). Каждую клетку в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы заполним числами равными $\frac{A}{k\cdot l}$, а каждую клетку в правом нижнем прямоугольнике $(m–k)\times(n–l)$ этой таблицы заполним числами равными $\frac{B}{(m - k)\cdot(n - l)}$. Тогда сумма чисел в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы равна *A*, а сумма чисел в правом нижнем прямоугольнике $(m–k)\times(n–l)$ этой таблицы равна *B*.

Далее проведем преобразование формулы (1.2). Выразим сначала $B – A$ из нее: $B - A = \frac{S(mn - ml - nk)}{mn}$. Откуда $B - A = \frac{S(mn - ml)}{mn} - \frac{Snk}{mn}$. Разделим на $k(n – l)$ обе части равенства: $\frac{S}{kn} - \frac{S}{m(n - l)} = \frac{B}{k(n - l)} - \frac{A}{k(n - l)}$. Откуда получаем следующее равенство.

$$\frac{S}{kn} - \frac{B}{k(n - l)} = \frac{S}{m(n - l)} - \frac{A}{k(n - l)}. \tag{1.3}$$

Числами равными $\frac{S}{m(n - l)} - \frac{A}{k(n - l)}$ заполним каждую клетку в правом верхнем прямоугольнике $k\times(n–l)$ (см. рисунок 1.2).

Аналогично из (1.2) получается еще одно равенство.

$$\frac{S}{ml} - \frac{B}{(m - k)l} = \frac{S}{(m - k)n} - \frac{A}{(m - k)l}. \tag{1.4}$$

Числами равными $\frac{S}{ml} - \frac{B}{(m - k)l}$ и такими числами надо заполнить все клетки в левом нижнем прямоугольнике $(m–k)\times l$ этой таблицы (см. рисунок 1.2). Тогда несложно проверить, что сумма в *k* верхних строках $\frac{A}{kl}\cdot l + (\frac{S}{m(n - l)} - \frac{A}{k(n - l)})\cdot(n - l) = \frac{S}{m}$, сумма в $(m–k)$ нижних строках $(\frac{S}{ml} - \frac{B}{(m - k)l})\cdot l + \frac{B}{(m - k)(n - l)}\cdot(n - l) = \frac{S}{m}$. Сумма в каждом из *l* левых столбцов согласно равенству (1.4) равна $\frac{A}{kl}\cdot k + (\frac{S}{(m - k)n} - \frac{A}{(m - k)l})\cdot(m - k) = \frac{S}{n}$. А также сумма в каждом из $(n–l)$ правых столбцов согласно равенству (1.3) равна $(\frac{S}{kn} - \frac{B}{k(n - l)})\cdot k + \frac{B}{(m - k)(n - l)}\cdot(m - k) = \frac{S}{n}$. То есть, все условия задачи выполнены. В этом случае сумма всех чисел в таблице *S* вычисляется по формуле (1.2).

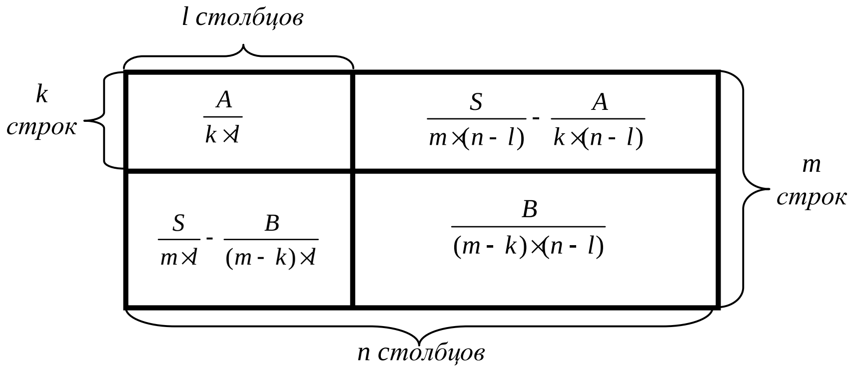


Рисунок 1.2 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}\ne 1$

Если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$, то чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $A = B$. Если $A \ne B$, то получаем равенство вида $S\cdot 0 = B - A$, которое в этом случае выполняться не будет.

Если же $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A = B$, то сумма всех чисел в таблице может принимать любое значение S. Для доказательства этого приведем пример заполнения таблицы (см. рисунок 1.3), при котором выполнены все условия задачи, а S – произвольное действительное число. Каждую клетку в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы заполним числами, равными $\frac{A}{k\cdot l}$, в правом нижнем прямоугольнике $(m-k)\times(n-l)$ числами равными $\frac{A}{(m-k)\cdot(n-l)}$. Клетки в правом верхнем прямоугольнике $k\times(n-l)$ заполним числами, равными $\frac{S}{m\cdot(n-l)}-\frac{A}{k\cdot(n-l)}$, клетки в левом нижнем прямоугольнике $(m-k)\times l$ заполним числами, равными $\frac{S}{m\cdot l}-\frac{A}{(m-k)\cdot l}$.

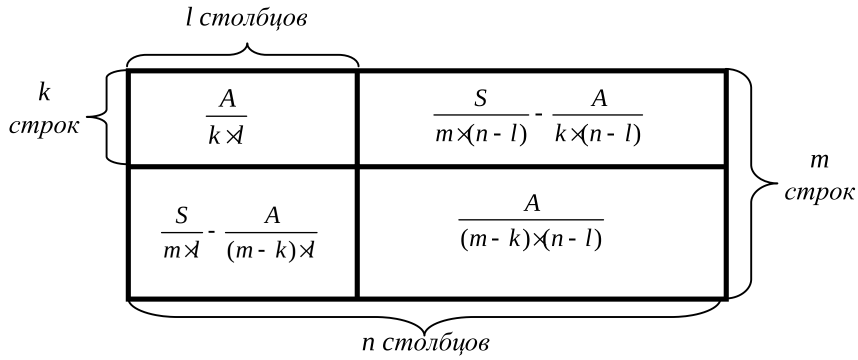


Рисунок 1.3 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A = B$

Легко проверяется, что сумма чисел в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы равна A, в правом нижнем прямоугольнике $(m-k)\times(n-l)$ равна B.

Также в каждой строке сумма чисел равна $\frac{S}{m}$.

Чтобы показать, что сумма чисел в каждом столбце $\frac{S}{n}$, надо использовать следующие равенства, которые очевидным образом следуют из $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$.

$$\frac{k}{m}=\frac{n-l}{n} \text{ и } \frac{l}{n}=\frac{m-k}{m}. \qquad \mathbf{(1.5)}$$

Тогда сумма в любом из l первых столбцов с учетом равенств (1.5) будет равна $\frac{A}{k\cdot l}\cdot k+\left(\frac{S}{m\cdot l}-\frac{A}{(m-k)\cdot l}\right)\cdot(m-k)=\frac{S\cdot(m-k)}{m\cdot l}=\frac{S\cdot l}{n\cdot l}=\frac{S}{n}$ и точно также для правых $(n-l)$ столбцов сумма в каждом из них учетом равенств (1.5) будет равна $\frac{A}{(m-k)\cdot(n-l)}\cdot(m-k)+\left(\frac{S}{m\cdot(n-l)}-\frac{A}{k\cdot(n-l)}\right)\cdot k=\frac{S\cdot k}{m\cdot(n-l)}=\frac{S\cdot(n-l)}{n\cdot(n-l)}=\frac{S}{n}$. То есть, все условия опять выполнены. При этом сумма чисел S в таблице может быть любой.

Ответ. Если m, n, k и l – натуральные числа, причем $k < m$, $l < n$, $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A = B$, то сумма всех чисел в таблице может быть любой.

Если m, n, k и l – натуральные числа, причем $k < m$, $l < n$, $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}\neq 1$, то $S=\frac{mn(B-A)}{mn-ml-nk}$.

При других m, n, k, l, A и B таблиц, удовлетворяющих условию не существует.

1.2 Разбиение таблицы на шесть частей

По аналогии с предыдущим подразделом, рассмотрим задачу, в которой прямоугольная таблица разбивалась бы не на четыре части, а на шесть частей. При этом сумма в трех из них задана, и требуется найти сумму чисел во всей таблице. Таким образом, мы приходим к следующей задаче.

Задача 1.2. Обозначим a_{ij} – число, записанное в i-ой строке и j-ом столбце таблицы $m\times n$. При этом известно, что суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые. Кроме того, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\right)=A$, $\sum_{i=k+1}^{m}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}a_{ij}\right)=B$ и $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}a_{ij}\right)=C$. Выясните, при каких m, n, k, l, q, A, B и C это возможно и найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от m, n, k, l, q, A, B и C. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

Решение. Сначала предположим, что такая таблица существует, и найдем ограничения, которые при этом накладываются на числа m, n, k, l, q, A, B и C. Сразу обратим внимание, что m, n, k, l и q – натуральные числа, причем $k < m$, $l + q < n$. Иначе невозможно говорить о сумме чисел в каких-то частях таблицы. Теперь по условию сумма чисел в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы равна A, сумма чисел в среднем нижнем прямоугольнике $(m-k)\times(n-l-q)$ этой таблицы равна B, а в правом верхнем прямоугольнике $k\times q$ этой таблицы равна C. Обозначим для удобства сумму чисел в среднем верхнем прямоугольнике $k\times(n-l-q)$ этой таблицы через X, как показано на рисунке 1.4.

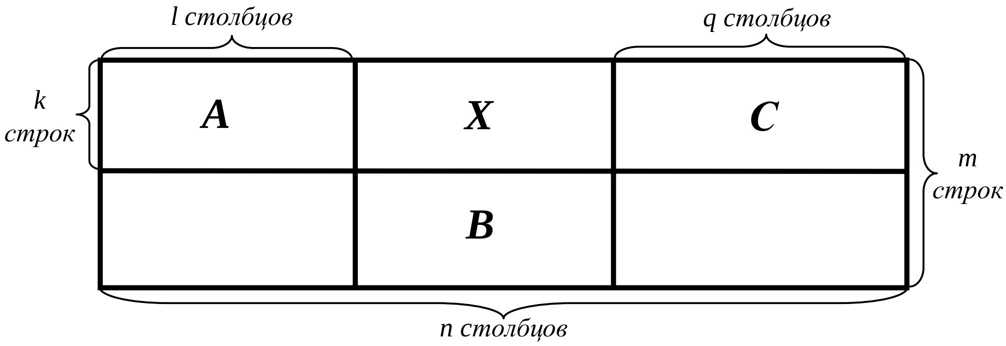


Рисунок 1.4 – Таблица, разбитая на 6 частей

Пусть S – сумма чисел во всей таблице. Тогда, так как суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые, то $\frac{S}{m}$ – сумма чисел в одной строке, $\frac{S}{n}$ – сумма чисел в одном столбце. Тогда сумма чисел в k верхних строках таблицы равна с одной стороны $A + X + C$, а с другой $k\cdot\frac{S}{m}$. Получили равенство $A + X + C = k\cdot\frac{S}{m}$. Аналогично, суммируя числа в (n–l–q) средних столбцах, получаем другое равенство $B + X = (n - l - q)\cdot\frac{S}{n}$. Объединим эти два равенства в систему.

$$\begin{cases} A + X + C = k\cdot\frac{S}{m}; \\ B + X = (n - l - q)\cdot\frac{S}{n}. \end{cases} \qquad \textbf{(1. 6)}$$

Вычтем из второго равенства системы (1.6) первое и получим $B - A - C = (n - l - q)\cdot\frac{S}{n} - k\cdot\frac{S}{m}$. Имеем линейное уравнение $S\cdot(1 - \frac{l}{n} - \frac{q}{n} - \frac{k}{m}) = B - A - C$ для нахождения S. Далее возможны два случая.

Если $\frac{l+q}{n} + \frac{k}{m} \neq 1$, то несложно выразить $S = (B - A - C)\Big/(1 - \frac{l}{n} - \frac{q}{n} - \frac{k}{m})$. После преобразования, в этом случае получаем формулу для нахождения суммы чисел в таблице.

$$S = \frac{mn(B - A - C)}{mn - ml - mq - nk}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

Приведем пример заполнения таблицы, при котором выполняются все условия задачи. Для этого разделим таблицу на шесть частей и заполним клетки одинаковыми числами, в каждой части своими, указанными на схеме (см. рисунок 1.5).

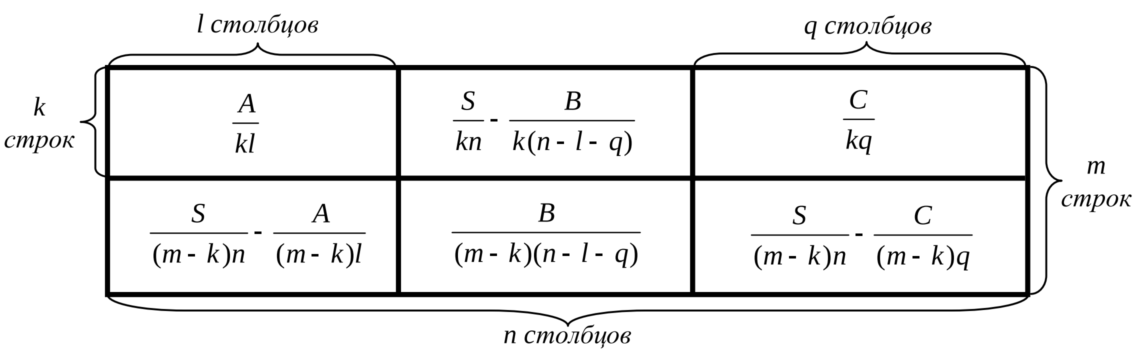


Рисунок 1.5 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l+q}{n} + \frac{k}{m} \neq 1$

Легко проверяется, что сумма чисел в соответствующих прямоугольниках равна *A*, *B* и *C*. То есть, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{A}{kl}\right)=\frac{A}{kl}\cdot kl=A$, $\sum_{i=k+1}^{m}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}\frac{B}{(m-k)(n-l-q)}\right)=B$ и $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}\frac{C}{kq}\right)=C$.

Также в каждом столбце сумма чисел равна $\frac{S}{n}$. Доказывается это простой проверкой: $\frac{A}{kl}\cdot k+\left(\frac{S}{(m-k)n}-\frac{A}{(m-k)l}\right)\cdot(m-k)=\frac{S}{n}$, $\left(\frac{S}{kn}-\frac{B}{k(n-l-q)}\right)\cdot k+\frac{B}{(m-k)(n-l-q)}\cdot(m-k)=\frac{S}{n}$, $\frac{C}{kq}\cdot k+\left(\frac{S}{(m-k)n}-\frac{C}{(m-k)q}\right)\cdot(m-k)=\frac{S}{n}$.

Для доказательства того, что в каждой из строк сумма чисел равна $\frac{S}{m}$ потребуются следующие равенства, которые несложно получить из (1.7).

$$\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{A+C}{k(n-l-q)}=\frac{S}{kn}-\frac{B}{k(n-l-q)}. \qquad \textbf{(1.8)}$$

$$\frac{B-A-C}{(m-k)}=S\cdot\left(\frac{1}{m}-\frac{l+q}{(m-k)n}\right). \qquad \textbf{(1.9)}$$

Тогда сумма в *k* первых строках $\frac{A}{kl}\cdot l+\left(\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{A+C}{k(n-l-q)}\right)\cdot(n-l-q)+\frac{C}{kq}\cdot q=\frac{S}{m}$ с учетом равенства (1.8). Сумму в (*m*–*k*) нижних строках можно вычислить следующим образом $\left(\frac{S}{(m-k)n}-\frac{A}{(m-k)l}\right)\cdot l+\frac{B}{(m-k)(n-l-q)}\cdot(n-l-q)+\left(\frac{S}{(m-k)n}-\frac{C}{(m-k)q}\right)\cdot q$. Ну а после преобразуя, получим $S\cdot\frac{l+q}{(m-k)n}+\frac{B-A-C}{(m-k)}$. Применяя равенство (1.9), найдем, что сумма чисел и в этих строках равна $\frac{S}{m}$. То есть, все условия задачи выполнены. В этом случае сумма всех чисел в таблице *S* вычисляется по формуле (1.7).

Второй случай, если $\frac{l+q}{n}+\frac{k}{m}=1$. Для того, чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $A + C = B$. Если $A + C \neq B$, то получаем равенство вида $S\cdot 0 = B - A - C$, которое в этом случае выполняться не будет.

Если же $\frac{l+q}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A + C = B$, то сумма всех чисел в таблице может принимать любое значение *S*. Приведем пример заполнения таблицы, при котором выполняются все условия задачи. Разделим таблицу на шесть частей и заполним клетки одинаковыми числами, в каждой части своими, указанными на схеме (см. рисунок 1.6).

Заметим, что эта схема почти не отличается от предыдущей. В ней только использовано, что $A + C = B$. Ввиду этого проверка того, что сумма чисел в соответствующих прямоугольниках равна *A*, *B* и *C*, а также того, что в каждом столбце сумма чисел равна $\frac{S}{n}$, проводится полностью аналогично.

l *столбцов* $\qquad$ q *столбцов*

k *строк* $\qquad$ m *строк* $\qquad$ n *столбцов*

$\frac{A}{kl}$	$\frac{S}{kn}-\frac{A+C}{k(n-l-q)}$	$\frac{C}{kq}$
$\frac{S}{(m-k)n}-\frac{A}{(m-k)l}$	$\frac{A+C}{(m-k)(n-l-q)}$	$\frac{S}{(m-k)n}-\frac{C}{(m-k)q}$

Рисунок 1.6 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l+q}{n}+\frac{k}{m}=1$ **и** $A+C=B$

Остается только доказать, что в каждой из строк сумма чисел равна $\frac{S}{m}$. Для этого равенство $\frac{l+q}{n}+\frac{k}{m}=1$ перепишем несколько в ином виде.

$$\frac{n-l-q}{n}=\frac{k}{m} \text{ и } \frac{l+q}{n}=\frac{m-k}{m}. \qquad \textbf{(1.10)}$$

Сумма в первых k строках $\frac{A}{kl}\cdot l+(\frac{S}{kn}-\frac{A+C}{k(n-l-q)})\cdot(n-l-q)+\frac{C}{kq}\cdot q=\frac{S\cdot(n-l-q)}{kn}$ и с учетом равенства (1.10) эта сумма равна $\frac{S\cdot(n-l-q)}{kn}=\frac{S}{k}\cdot\frac{n-l-q}{n}=\frac{S}{k}\cdot\frac{k}{m}=\frac{S}{m}$. Для $(m–k)$ нижних строчек сумму в них можно вычислить следующим образом $(\frac{S}{(m-k)n}-\frac{A}{(m-k)l})\cdot l+\frac{A+C}{(m-k)(n-l-q)}\cdot(n-l-q)+(\frac{S}{(m-k)n}-\frac{C}{(m-k)q})\cdot q$. Преобразуя и применяя равенство (1.10), получим $S\cdot\frac{l+q}{(m-k)n}=\frac{S}{m-k}\cdot\frac{l+q}{n}=\frac{S}{m-k}\cdot\frac{m-k}{n}=\frac{S}{m}$. То есть, все условия задачи выполнены. Сумма чисел S в таблице при этом может быть любой.

Ответ. Если m, n, k, l и q – натуральные числа, причем $k < m$, $l + q < n$, $\frac{l+q}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A + C = B$, то сумма всех чисел в таблице может быть любой.

Если m, n, k, l и q – натуральные числа, причем $k < m$, $l + q < n$, $\frac{l+q}{n}+\frac{k}{m}\neq 1$, то $S=\frac{mn(B-A-C)}{mn-ml-mq-nk}$.

При других m, n, k, l, q, A, B и C таблиц, удовлетворяющих условию не существует.

1.3 Разбиение таблицы на девять частей

Опять обратимся к приложению А, где приведено условие задачи 4 «Суммы в таблицах», которая предлагалась на XXII Республиканском турнире юных математиков [1]. На этот раз обобщим второй пункт этой задачи. И опять вместо квадратной таблицы будем рассматривать прямоугольную. Но разбивать ее будем уже на девять частей. В итоге, сформулируем и решим следующую задачу.

Задача 1.3. Обозначим a_{ij} – число, записанное в i-ой строке и j-ом столбце таблицы $m\times n$. При этом известно, что суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые. Кроме того, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\right)=A$, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n} a_{ij}\right)=B$,

$\sum\limits_{i=m-r+1}^{m}\left(\sum\limits_{j=n-q+1}^{n} a_{ij}\right)=C$, $\sum\limits_{i=m-r+1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{l} a_{ij}\right)=D$ и $\sum\limits_{i=k+1}^{m-r}\left(\sum\limits_{j=l+1}^{n-q} a_{ij}\right)=F$. Выясните, при каких m, n, k, r, l, q, A, B, C, D и F это возможно и найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от m, n, k, r, l, q, A, B, C, D и F. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

Решение. Сначала предположим, что такая таблица существует, и найдем ограничения, которые при этом накладываются на числа m, n, k, r, l, q, A, B, C, D и F. Сразу обратим внимание, что m, n, k, r, l и q – натуральные числа, причем $k + r < m$, $l + q < n$. Иначе невозможно говорить о сумме чисел в каких-то частях таблицы. Теперь по условию сумма чисел в левом верхнем прямоугольнике $k \times l$ этой таблицы равна A, в правом верхнем прямоугольнике $k \times q$ равна B, в правом нижнем прямоугольнике $r \times q$ равна C, в левом нижнем прямоугольнике $r \times l$ равна D, а сумма чисел в центральном прямоугольнике $(m–k–r) \times (n–l–q)$ этой таблицы, как показано на рисунке 1.7, равна F.

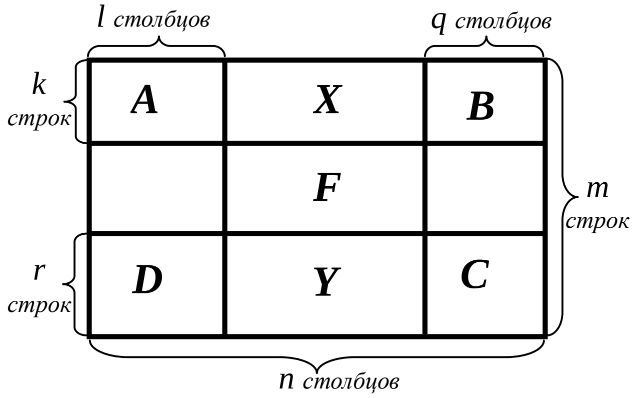


Рисунок 1.7 – Таблица, разбитая на 9 частей

Пусть S – сумма чисел во всей таблице. Тогда, так как суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые, то $\frac{S}{m}$ – сумма чисел в одной строке, $\frac{S}{n}$ – сумма чисел в одном столбце. Обозначим для удобства суммы чисел в двух прямоугольниках, как показано на рисунке 1.7, через X и Y. Тогда получаем три уравнения.

$$\begin{cases} A + X + B = k \cdot \dfrac{S}{m}; \\ D + Y + C = r \cdot \dfrac{S}{m}; \\ X + F + Y = (n - l - q) \cdot \dfrac{S}{n}. \end{cases} \qquad \textbf{(1. 11)}$$

Из третьего уравнения вычтем два первых и получим следующее линейное уравнение.

$$F - A - B - C - D = S \cdot \left(1 - \frac{l}{n} - \frac{q}{n} - \frac{k}{m} - \frac{r}{m}\right). \qquad \textbf{(1. 12)}$$

Теперь опять возможны два случая. Разберем их подробнее.

Случай первый, если $\frac{l}{n} + \frac{q}{n} + \frac{k}{m} + \frac{r}{m} \neq 1$, то из уравнения (1.12) можно найти искомую. сумму $S = (F - A - B - C - D) \Big/ \left(1 - \frac{l}{n} - \frac{q}{n} - \frac{k}{m} - \frac{r}{m}\right)$. После преобразований имеем равенство.

$$S = \frac{mn(F - A - B - C - D)}{mn - ml - mq - nk - nr}. \qquad \textbf{(1. 13)}$$

При этом такие таблицы существуют, достаточно каждую клетку таблицы заполнить указанными на рисунке 1.8 в соответствующих прямоугольниках числами.

	l столбцов		*q столбцов*	
k строк	$\frac{A}{k\cdot l}$	$\frac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\frac{A+B}{k\cdot(n-l-q)}$	$\frac{B}{k\cdot q}$	*m строк*
	$\frac{S}{n\cdot(m-k-r)}-\frac{A+D}{l\cdot(m-k-r)}$	$\frac{F}{(m-k-r)\cdot(n-l-q)}$	$\frac{S}{n\cdot(m-k-r)}-\frac{B+C}{q\cdot(m-k-r)}$	
r строк	$\frac{D}{r\cdot l}$	$\frac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\frac{C+D}{r\cdot(n-l-q)}$	$\frac{C}{r\cdot q}$	
	n столбцов			

Рисунок 1.8 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l+q}{n}+\frac{k+r}{m}\neq 1$

Суммы чисел в соответствующих прямоугольниках, будут *A*, *B*, *C*, *D* и *F*, так как стоящие в них числа одинаковы, и их нужно только умножить на их количество. Сумма чисел в верхних *k* и нижних *r* строках очевидно $\frac{S}{m}$. Как и сумма в левых *l* и правых *q* столбцах равна $\frac{S}{n}$. Чтобы показать, что сумма чисел в остальных строках равна $\frac{S}{m}$ и в остальных столбцах равна $\frac{S}{n}$, надо использовать вытекающее из (1.12) равенство $F-A-B-C-D=S\cdot(1-\frac{l+q}{n}-\frac{k+r}{m})$. В *i*-ой строке при $k<i\leq m-r$ сумма равна $\frac{S\cdot l}{n\cdot(m-k-r)}+\frac{S\cdot q}{n\cdot(m-k-r)}+\frac{F-A-B-C-D}{(m-k-r)}=\frac{S\cdot(1-\frac{k+r}{m})}{(m-k-r)}=\frac{S}{m}$. Аналогично столбцах, проходящих через центральный прямоугольник, сумма чисел может быть найдена как $\frac{S\cdot k}{m\cdot(n-l-q)}+\frac{S\cdot r}{m\cdot(n-l-q)}+\frac{F-A-B-C-D}{(n-l-q)}=\frac{S\cdot(1-\frac{l+q}{n})}{(n-l-q)}=\frac{S}{n}$. Все условия задачи выполнены. В этом случае сумма всех чисел в таблице *S* вычисляется по формуле (1.13).

Случай второй, если $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$. Для того, чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $F = A + B + C + D$. Если $A + B + C + D \neq F$, то получаем равенство вида $S\cdot 0 = F - A - B - C - D$, которое в этом случае выполняться не будет.

Если же $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$ и $F = A + B + C + D$, то сумма всех чисел в таблице может принимать любое значение *S*. При этом достаточно заполнить, как указано на рисунке 1.9.

	l столбцов		*q столбцов*	
k строк	$\dfrac{A}{k\cdot l}$	$\dfrac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\dfrac{A+B}{k\cdot(n-l-q)}$	$\dfrac{B}{k\cdot q}$	*m строк*
	$\dfrac{S}{n\cdot(m-k-r)}-\dfrac{A+D}{l\cdot(m-k-r)}$	$\dfrac{A+B+C+D}{(m-k-r)\cdot(n-l-q)}$	$\dfrac{S}{n\cdot(m-k-r)}-\dfrac{B+C}{q\cdot(m-k-r)}$	
r строк	$\dfrac{D}{r\cdot l}$	$\dfrac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\dfrac{C+D}{r\cdot(n-l-q)}$	$\dfrac{C}{r\cdot q}$	
		n столбцов		

Рисунок 1.9 – Схема заполнения таблицы, если $\dfrac{l+q}{n}+\dfrac{k+r}{m}=1$ и $F = A + B + C + D$

Суммы чисел в соответствующих прямоугольниках, будут A, F, C, D и B, так как стоящие в них числа одинаковы, и их нужно только умножить на их количество. А используя то, что из $\dfrac{l}{n}+\dfrac{q}{n}+\dfrac{k}{m}+\dfrac{r}{m}=1$ следует $\dfrac{l+q}{n}=\dfrac{m-k-r}{m}$ и $\dfrac{k+r}{m}=\dfrac{n-l-q}{n}$, легко показать, что сумма чисел в каждой строке $\dfrac{S}{m}$, в каждом столбце $\dfrac{S}{n}$. То есть, все условия задачи выполнены. Сумма чисел S в таблице при этом может быть любой.

Ответ. Если m, n, k, r, l и q – натуральные числа, причем $k + r < m$, $l + q < n$, $\dfrac{l+q}{n}+\dfrac{k+r}{m}=1$ и $F = A + B + C + D$, то сумма всех чисел в таблице может быть любой.

Если m, n, k, r, l и q – натуральные числа, причем $k + r < m$, $l + q < n$, $\dfrac{l+q}{n}+\dfrac{k+r}{m}\neq 1$, то $S=\dfrac{mn(F-A-B-C-D)}{mn-ml-mq-nk-nr}$.

При других m, n, k, r, l, q, A, B, C, D и F таблиц, удовлетворяющих условию не существует.

1.4 Разбиение таблицы на двенадцать частей

По аналогии с предыдущим подразделом, рассмотрим задачу, в которой прямоугольная таблица разбивалась бы уже на двенадцать частей. При этом сумма в шести из них задана, и требуется найти сумму чисел во всей таблице. Таким образом, мы приходим к следующей задаче.

Задача 1.4. Обозначим a_{ij} – число, записанное в i-ой строке и j-ом столбце таблицы $m\times n$. При этом известно, что суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые. Кроме того, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\right)=A$, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}a_{ij}\right)=B$, $\sum_{i=k+1}^{k+t}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}a_{ij}\right)=C$, $\sum_{i=k+t+1}^{m-r}\left(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\right)=D$, $\sum_{i=k+t+1}^{m-r}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}a_{ij}\right)=E$ и $\sum_{i=m-r+1}^{m}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}a_{ij}\right)=F$. Выясните, при каких m, n, k, t, r, l, q, A, B, C, D, E и F это возможно и найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от m, n, k, t, r, l, q, A, B, C, D, E и F. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

Решение. Сначала предположим, что такая таблица существует, и найдем ограничения, которые при этом накладываются на числа m, n, k, t, r, l, q, A, B, C, D, E и F. Сразу обратим внимание, что m, n, k, t, r, l и q – натуральные числа, причем $k + t + r < m$, $l + q < n$. Иначе невозможно говорить о сумме чисел в каких-то частях таблицы.

Пусть S – сумма чисел во всей таблице. Тогда, так как суммы чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые, то $\frac{S}{m}$ – сумма чисел в одной строке, $\frac{S}{n}$ – сумма чисел в одном столбце. Обозначим для удобства суммы чисел в двух прямоугольниках, как показано на рисунке 1.10, через X и Y. Тогда получаем следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} A + X + B = k \cdot \frac{S}{m}; \\ D + Y + E = (m - k - t - r) \cdot \frac{S}{m}; \\ X + C + Y + F = (n - l - q) \cdot \frac{S}{n}. \end{cases} \quad \textbf{(1. 14)}$$

Из третьего уравнения вычтем два первых и получим следующее линейное уравнение.

$$C + F - A - B - D - E = S \cdot \left(\frac{t}{m} + \frac{r}{m} - \frac{l}{n} - \frac{q}{n}\right). \quad \textbf{(1. 15)}$$

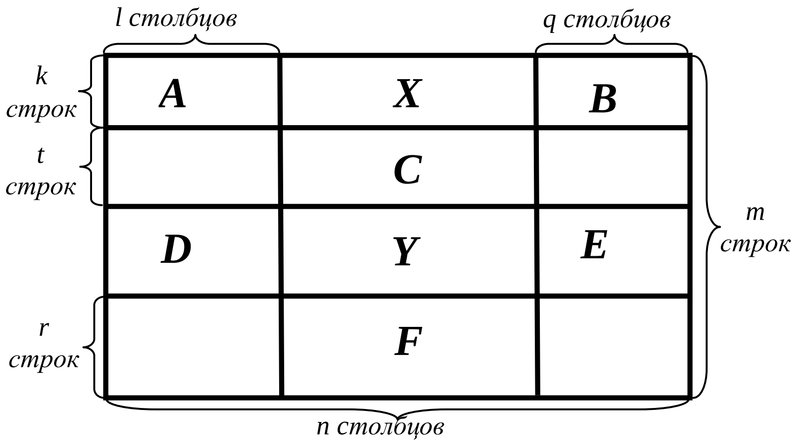


Рисунок 1.10 – Таблица, разбитая на 12 частей

Теперь для равенства (1.15) возможны два случая. Разберем их подробнее.

Случай первый, если $\frac{l+q}{n} \neq \frac{t+r}{m}$. Тогда из уравнения (1.15) можно найти искомую. сумму $S = (C + F - A - B - D - E)\Big/\left(\frac{t}{m} + \frac{r}{m} - \frac{l}{n} - \frac{q}{n}\right)$. После преобразований имеем равенство.

$$S = \frac{mn(C + F - A - B - D - E)}{nt + nr - ml - mq}. \quad \textbf{(1. 16)}$$

Чтобы доказать, что таблицы с указанными выше свойствами действительно существуют, приведем пример такой таблицы. Для этого достаточно каждую клетку таблицы заполнить указанными на рисунке 1.11 в соответствующих прямоугольниках числами.

Покажем, что все условия задачи для этой таблицы выполнены. Действительно, суммы в указанных в условии частях таблицы равны $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{A}{k \cdot l}\right) = A$, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}\frac{B}{k \cdot q}\right) = B$,

$$\sum_{i=k+1}^{k+t}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}\frac{C}{t\cdot(n-l-q)}\right)=C,\quad \sum_{i=k+t+1}^{m-r}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{D}{(m-k-t-r)\cdot l}\right)=D,\quad \sum_{i=k+t+1}^{m-r}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}\frac{E}{(m-k-t-r)\cdot q}\right)=E$$

и $\sum_{i=m-r+1}^{m}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}\frac{F}{r\cdot(n-l-q)}\right)=F$.

	l столбцов		*q столбцов*
k строк	$\frac{A}{k\cdot l}$	$\frac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\frac{A+B}{k\cdot(n-l-q)}$	$\frac{B}{k\cdot q}$
t строк	$\frac{S}{m\cdot l}$	$\frac{C}{t\cdot(n-l-q)}$	$-\frac{C}{t\cdot q}$
	$\frac{D}{(m-k-t-r)\cdot l}$	$\frac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\frac{D+E}{(m-k-t-r)\cdot(n-l-q)}$	$\frac{E}{(m-k-t-r)\cdot q}$
r строк	$\frac{S}{r\cdot n}-\frac{S\cdot t}{r\cdot m\cdot l}-\frac{A+D}{r\cdot l}$	$\frac{F}{r\cdot(n-l-q)}$	$\frac{S}{r\cdot n}+\frac{C-B-E}{r\cdot q}$

m строк

n столбцов

Рисунок 1.11 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l+q}{n}\neq\frac{t+r}{m}$

Суммы в строках несложно вычислить. Это будет одно из следующих выражений:

$$\frac{A}{kl}\cdot l+\left(\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{A+B}{k(n-l-q)}\right)\cdot(n-l-q)+\frac{B}{kq}\cdot q=\frac{S}{m},$$

$$\frac{S}{ml}\cdot l+\frac{C}{t(n-l-q)}\cdot(n-l-q)+\left(-\frac{C}{tq}\right)\cdot q=\frac{S}{m},$$

$$\frac{D}{(m-k-t-r)l}\cdot l+\left(\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{D+E}{(m-k-t-r)(n-l-q)}\right)\cdot(n-l-q)+\frac{E}{(m-k-t-r)q}\cdot q=\frac{S}{m},$$

$$\left(\frac{S}{rn}-\frac{St}{rml}-\frac{A+D}{rl}\right)\cdot l+\frac{F}{r(n-l-q)}\cdot(n-l-q)+\left(\frac{S}{rn}+\frac{C-B-E}{rq}\right)\cdot q=S\cdot\left(\frac{l+q}{rn}-\frac{t}{rm}\right)+\frac{C+F-A-B-D-E}{r}=$$

$$=S\cdot\left(\frac{l+q}{rn}-\frac{t}{rm}\right)+\frac{S\cdot\left(\frac{t}{m}+\frac{r}{m}-\frac{l}{n}-\frac{q}{n}\right)}{r}=S\cdot\left(\frac{l+q}{rn}-\frac{t}{rm}+\frac{t}{rm}+\frac{1}{m}-\frac{l}{rn}-\frac{q}{rn}\right)=\frac{S}{m}.$$

В последнем преобразовании использовалось равенство (1.15). Как видим, сумма чисел в любой строке равна $\frac{S}{m}$.

Подсчитаем аналогично суммы чисел в столбцах.

$$\frac{A}{kl}\cdot k+\frac{S}{ml}\cdot t+\frac{D}{(m-k-t-r)l}\cdot(m-k-t-r)+\left(\frac{S}{rn}-\frac{St}{rml}-\frac{A+D}{rl}\right)\cdot r=\frac{S}{n},$$

$$\left(\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{A+B}{k(n-l-q)}\right)\cdot k+\frac{C}{t(n-l-q)}\cdot t+\left(\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{D+E}{(m-k-t-r)(n-l-q)}\right)\cdot(m-k-t-r)+\frac{F}{r(n-l-q)}\cdot r=$$

$$=S\cdot\left(\frac{k}{m(n-l-q)}+\frac{m-k-t-r}{m(n-l-q)}\right)+\frac{C+F-A-B-D-E}{n-l-q}=S\cdot\frac{m-t-r}{m(n-l-q)}+\frac{S\cdot\left(\frac{t}{m}+\frac{r}{m}-\frac{l}{n}-\frac{q}{n}\right)}{n-l-q}=\frac{S}{n},$$

$$\frac{B}{kq}\cdot k+(-\frac{C}{tq})\cdot t+\frac{E}{(m-k-t-r)q}\cdot(m-k-t-r)+(\frac{S}{rn}+\frac{C-B-E}{rq})\cdot r=\frac{S}{n}.$$

Во втором преобразовании использовалось равенство (1.15). Как видим, сумма чисел в любом столбце равна $\frac{S}{n}$.

Все условия задачи выполнены. В этом случае сумма всех чисел в таблице S вычисляется по формуле (1.16).

Случай второй, если $\frac{l+q}{n}=\frac{t+r}{m}$. Для того, чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $C+F=A+B+D+E$. Если $C+F\neq A+B+D+E$, то получаем равенство вида $S\cdot 0=C+F-A-B-D-E$, которое в этом случае выполняться не будет.

Если же $\frac{l+q}{n}=\frac{t+r}{m}$ и $C+F=A+B+D+E$, то сумма всех чисел в таблице может принимать любое значение S. При этом достаточно заполнить, как указано на рисунке 1.12.

	l столбцов		*q столбцов*	
k строк	$\frac{A}{k\cdot l}$	$\frac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\frac{A+B}{k\cdot(n-l-q)}$	$\frac{B}{k\cdot q}$	*m строк*
t строк	$\frac{S}{m\cdot l}$	$\frac{C}{t\cdot(n-l-q)}$	$-\frac{C}{t\cdot q}$	
	$\frac{D}{(m-k-t-r)\cdot l}$	$\frac{S}{m\cdot(n-l-q)}-\frac{D+E}{(m-k-t-r)\cdot(n-l-q)}$	$\frac{E}{(m-k-t-r)\cdot q}$	
r строк	$\frac{S}{r\cdot n}-\frac{S\cdot t}{r\cdot m\cdot l}-\frac{A+D}{r\cdot l}$	$\frac{F}{r\cdot(n-l-q)}$	$\frac{S}{r\cdot n}+\frac{C-B-E}{r\cdot q}$	
	n столбцов			

Рисунок 1.12 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l+q}{n}=\frac{t+r}{m}$ и $C+F=A+B+D+E$

Покажем, что все условия задачи для этой таблицы выполнены. Действительно, суммы в указанных в условии частях таблицы равны $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{A}{k\cdot l}\right)=A$, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}\frac{B}{k\cdot q}\right)=B$,

$\sum_{i=k+1}^{k+t}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}\frac{C}{t\cdot(n-l-q)}\right)=C$, $\sum_{i=k+t+1}^{m-r}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{D}{(m-k-t-r)\cdot l}\right)=D$, $\sum_{i=k+t+1}^{m-r}\left(\sum_{j=n-q+1}^{n}\frac{E}{(m-k-t-r)\cdot q}\right)=E$

и $\sum_{i=m-r+1}^{m}\left(\sum_{j=l+1}^{n-q}\frac{F}{r\cdot(n-l-q)}\right)=F$.

Найдем суммы чисел в строках таблицы.

$$\frac{A}{kl}\cdot l+(\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{A+B}{k(n-l-q)})\cdot(n-l-q)+\frac{B}{kq}\cdot q=\frac{S}{m},$$

$$\frac{S}{ml}\cdot l+\frac{C}{t(n-l-q)}\cdot(n-l-q)+(-\frac{C}{tq})\cdot q=\frac{S}{m},$$

$$\frac{D}{(m-k-t-r)l}\cdot l+(\frac{S}{m(n-l-q)}-\frac{D+E}{(m-k-t-r)(n-l-q)})\cdot(n-l-q)+\frac{E}{(m-k-t-r)q}\cdot q=\frac{S}{m},$$

$$(\frac{S}{rn} - \frac{St}{rml} - \frac{A+D}{rl})\times l + \frac{F}{r(n-l-q)}\times(n-l-q) + (\frac{S}{rn} + \frac{C-B-E}{rq})\times q = S\times(\frac{l+q}{rn} - \frac{t}{rm}) + \frac{C+F-A-B-D-E}{r} =$$

$$= S\times\frac{ml+mq-tn}{rmn} = S\times\frac{rn}{rmn} = \frac{S}{m}.$$

В последнем преобразовании использовалось равенство $ml + mq - tn = rn$, которое непосредственно следует из того, что $\frac{l+q}{n} = \frac{t+r}{m}$. Как видим, сумма чисел в любой строке равна $\frac{S}{m}$.

Подсчитаем аналогично суммы чисел в столбцах.

$$\frac{A}{kl}\times k + \frac{S}{ml}\times t + \frac{D}{(m-k-t-r)l}\times(m-k-t-r) + (\frac{S}{rn} - \frac{St}{rml} - \frac{A+D}{rl})\times r = \frac{S}{n},$$

$$(\frac{S}{m(n-l-q)} - \frac{A+B}{k(n-l-q)})\times k + \frac{C}{t(n-l-q)}\times t + (\frac{S}{m(n-l-q)} - \frac{D+E}{(m-k-t-r)(n-l-q)})\times(m-k-t-r) + \frac{F}{r(n-l-q)}\times r =$$

$$= S\times(\frac{k}{m(n-l-q)} + \frac{m-k-t-r}{m(n-l-q)}) + \frac{C+F-A-B-D-E}{n-l-q} = S\times\frac{m-t-r}{m(n-l-q)} = S\times\frac{mn-tn-rn}{mn(n-l-q)} = S\times\frac{mn-ml-mq}{n(mn-ml-mq)} = \frac{S}{n},$$

$$\frac{B}{kq}\times k + (-\frac{C}{tq})\times t + \frac{E}{(m-k-t-r)q}\times(m-k-t-r) + (\frac{S}{rn} + \frac{C-B-E}{rq})\times r = \frac{S}{n}.$$

Во втором преобразовании использовалось равенство равенство $ml + mq = tn + rn$, которое непосредственно следует из того, что $\frac{l+q}{n} = \frac{t+r}{m}$. Как видим, сумма чисел в любом столбце равна $\frac{S}{n}$.

Все условия задачи выполнены. Сумма чисел S в таблице при этом может быть любой.

Ответ. Если m, n, k, t, r, l и q – натуральные числа, причем $k + t + r < m$, $l + q < n$, $\frac{l+q}{n} = \frac{t+r}{m}$ и $C + F = A + B + D + E$, то сумма всех чисел в таблице может быть любой.

Если m, n, k, t, r, l и q – натуральные числа, причем $k + t + r < m$, $l + q < n$, $\frac{l+q}{n} \neq \frac{t+r}{m}$, то $S = \frac{mn(C+F-A-B-D-E)}{nt+nr-ml-mq}$.

При других m, n, k, t, r, l, q, A, B, C, D, E и F таблиц, удовлетворяющих условию не существует.

2. НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ ЧИСЕЛ В ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ТАБЛИЦАХ

В основу этого раздела легло решения пункта 3 из задачи 4 «Суммы в таблицах» [1], которая предлагалась на XXII Республиканском турнире юных математиков. Полное условие этой задачи приведено в приложении А. В этом же разделе мы сначала сформулируем некоторые необходимые для решения задачи понятия, затем уже сформулируем и решим саму задачу.

2.1 Шестиугольные таблицы

Итак, в данном разделе работы будем рассматривать шестиугольные таблицы. Пример такой таблицы изображен на рисунке 2.1.

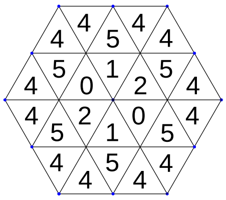


Рисунок 2.1 – Пример шестиугольной таблицы

Строкой шестиугольной таблицы будем называть множество треугольников, расположенных между двумя соседними параллельными прямыми из тех прямых, которые проходят параллельно одной из сторон шестиугольника и разбивают эти стороны на n равных частей. На рисунке 2.2 слева изображена горизонтальная строка, параллельная верхней (нижней) стороне шестиугольника. На рисунке 2.2 справа изображена диагональная строка, параллельная левой нижней (правой верхней) стороне шестиугольника. Аналогично можно построить диагональную строку, параллельную правой нижней (левой верхней) стороне шестиугольника. Сами треугольники и являются клетками таблицы. В приведенном примере на рисунке 2.1 каждая сторона шестиугольника разбита на $n = 2$ части. Если заполнить клетки таблицы так, как показано на рисунке 2.1, то сумма чисел в любой из двенадцати строк таблицы будет равна 21.

Рисунок 2.2 – Пример строки в шестиугольной таблице

Рассмотрим шестиугольную таблицу и разобьем каждую ее сторону на n частей. Выберем один узел получившейся треугольной решетки. Через него проходят три прямые, параллельные сторонам шестиугольника и разбивающие его на 6 частей. Введем понятие расстояние от узла решетки до стороны шестиугольника. Под этим расстоянием будем понимать количество строк шестиугольной таблицы, параллельных этой стороне и расположенных между выбранным узлом и стороной шестиугольника. Три из этих расстояний назовем координатами узла. Это расстояние k до верхней стороны шестиугольника (на рисунке 2.3 обозначена красным), расстояние l до левой нижней стороны шестиугольника (на рисунке 2.3 обозначена синим) и расстояние q до правой нижней стороны шестиугольника (на рисунке 2.3 обозначена зеленым). Понятно, что расстояния до этих трех попарно не смежных сторон полностью определяют положение узла. Однако, оказывается, достаточно только двух из этих трех координат, чтоб полностью задать узел.

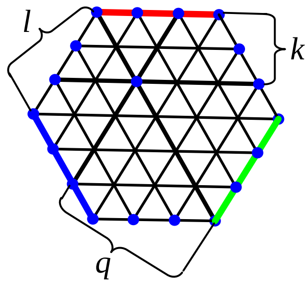


Рисунок 2.3 – Задание координат узла сетки в шестиугольной таблице

Лемма 2.1. Для любого узла таблицы $k + l + q = 3n$.

Доказательство. Рассмотрим сначала узел в самом центре таблицы. Он расположен на пересечении трех диагоналей шестиугольника. Для него $k = l = q = n$, условия леммы выполнены. Два узла решетки назовем соседними, если они являются вершинами треугольника, являющегося клетки этой таблицы. Покажем, что суммы координат двух соседних узлов равны между собой. Тогда, так как из любого узла таблицы можно попасть в любой другой узел таблицы, если перемещаться только между соседними узлами, то суммы координат двух любых соседних узлов таблицы будут равны между собой. А так как для центрального узла эта сумма равна $k + l + q = 3n$, то лемма будет доказана.

Так как узлы соседние, то они расположены на прямой, параллельной одной из трех сторон шестиугольника: верхней (красной), левой нижней (синей) или правой нижней (зеленой). Тогда расстояние до этой стороны у узлов одинаковое и одна из координат у них совпадает. Пусть, не теряя общности, совпадает координата k. Тогда, перемещаясь вдоль горизонтальной прямой от одного узла к соседнему, мы либо удаляемся от синей границы на одну клеточку и приближаемся к зеленой на одну клеточку, либо наоборот, удаляемся от зеленой границы на одну клеточку и приближаемся к синей на одну клеточку. В первом случае l увеличивается на 1, q уменьшается на 1. Во втором наоборот l уменьшается на 1, q увеличивается на 1. В обоих случаях их сумма остается неизменной. Но тогда для двух соседних узлов $k + l + q$ одинаково. Случай когда совпадает координата l или q рассматриваются аналогично. С учетом выше сказанного лемма доказана.

Из леммы вытекает, что достаточно указать только две координаты, k и l, чтобы полностью задать узел. Третью координату узла можно рассчитать как $q = n – k – l$.

Теперь опишем, как можно задать координаты клеток таблицы. Клетки таблицы являются треугольниками и бывают двух типов. Первый тип клеток – это равносторонний треугольник, горизонтальная сторона которого расположена снизу, а вверху вершина. Второй тип клеток – это также равносторонний треугольник, горизонтальная сторона которого расположена уже сверху, а снизу расположена вершина. Вот по координатам этой вершины, которая у первого типа клеток расположена сверху, а у второго снизу и будем задавать координаты клеток. Пусть координаты указанной вершины k, l, q. Тогда координатами клетки назовем тройку чисел (k, l, r), где $r = 0$, если это треугольник первого типа и $r = 1$, если соответственно второго. Две координаты, согласно лемме, полностью определяют узел, а вверх или вниз от узла расположена клетка, задается третьей координатой r. Чтобы лучше понять принцип задания координат клеток, рассмотрим его на примере. На рисунке 2.4 указаны координаты клеток в таблице при $n = 4$.

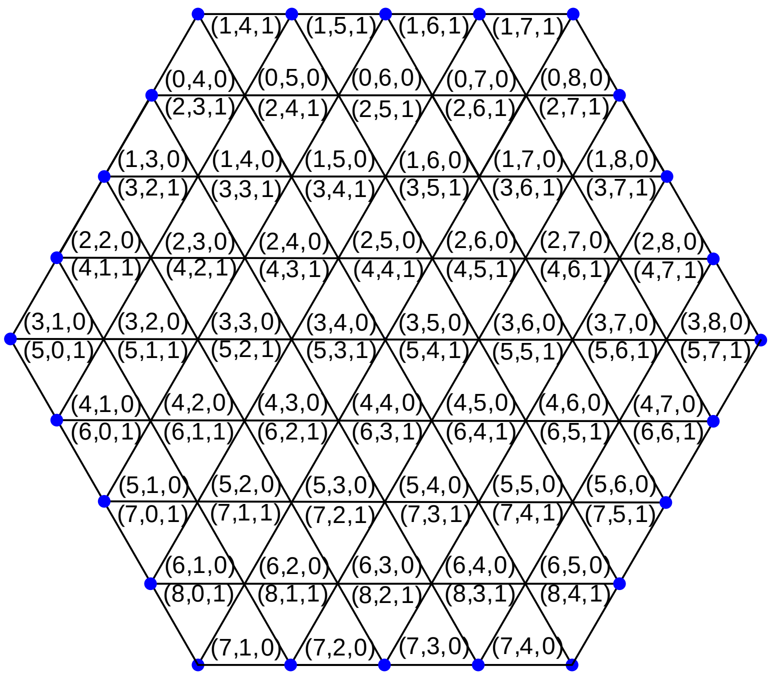


Рисунок 2.4 – Пример задания координат клеток в шестиугольной таблице

2.2 Сумма чисел в шестиугольных таблицах

Теперь можно приступить к решению третьего пункта задачи 4 «Суммы в таблицах» [1], которая предлагалась на XXII Республиканском турнире юных математиков. Для этого необходимо сформулировать вопросы, на которые будем отвечать в данном подразделе.

Задача 2.1. Пусть задана шестиугольная таблица (правильный шестиугольник), каждая сторона которой разбита на четыре равные части. Через каждую точку разбиения проведены прямые, параллельные сторонам этой таблицы. В получившейся сетке выбран узел с координатами (3; 4), как показано на рисунке 2.5. Через него проходят три прямые, параллельные сторонам шестиугольника и разбивающие его на 6 частей. В каждую клетку таблицы с координатами $(i; j; r)$ записано некоторое число a_{ijr}. Суммы чисел во всех 24 строках таблицы одинаковы. суммы чисел в трех из шести частей известны, это A, B и C (см. рисунок 2.5), или $\sum\limits_{i<3,\, j\le 4} a_{ij0} + \sum\limits_{i\ge 3,\, j<4} a_{ij1} = A$, $\sum\limits_{i<3,\, i+j\ge 7} a_{ij0} + \sum\limits_{i\ge 3,\, i+j>7} a_{ij1} = B$ и $\sum\limits_{j<4,\, i+j\ge 7} a_{ij0} + \sum\limits_{j\ge 4,\, i+j>7} a_{ij1} = C$. Найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от A, B и C. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

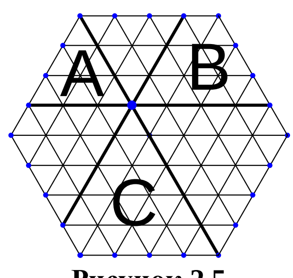


Рисунок 2.5

Решение. Обозначим через S сумму чисел в таблице, тогда сумма чисел в любой строке, параллельной одной из сторон шестиугольника, будет $\frac{S}{8}$. Суммы в оставшихся трех частях обозначим соответственно, через X, Y и Z, как показано на рисунке 2.6. В наших обозначениях имеем:

$$A+B+C+X+Y+Z=S. \qquad \textbf{(2. 1)}$$

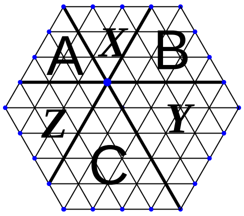


Рисунок 2.6

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+X+B=3S/8; \\ X+B+Y=4S/8; \\ B+Y+C=5S/8; \\ Y+C+Z=5S/8; \\ C+Z+A=4S/8; \\ Z+A+X=3S/8. \end{cases} \qquad \textbf{(2. 2)}$$

Сложив первое, третье и пятое уравнения системы 2.2 и вычтя (2.1), получаем A+B+C=4S/8. Откуда находим

$$S=2(A+B+C). \qquad \textbf{(2. 3)}$$

Пример, показывающий, что такая таблица существует, приведен на рисунке 2.7.

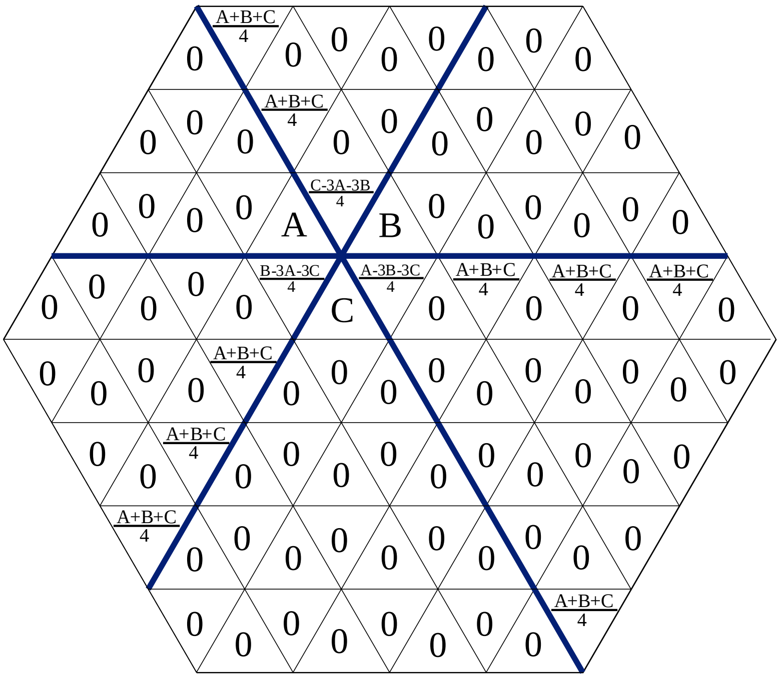


Рисунок 2.7

Ответ. Сумма всех чисел в таблице равна $S=2(A+B+C)$.

Задача 2.2. Пусть задана шестиугольная таблица (правильный шестиугольник), каждая сторона которой разбита на четыре равные части. Через каждую точку разбиения проведены прямые, параллельные сторонам этой таблицы. В получившейся сетке выбран узел с координатами (k; l), как показано на рисунке 2.8. Через него проходят три прямые, параллельные сторонам шестиугольника и разбивающие его на 6 частей. В каждую клетку таблицы с координатами (i; j; r) записано некоторое число a_{ijr}. Суммы чисел во всех 24 строках таблицы одинаковы, и известно $\sum_{i<k,\, j\le l} a_{ij0} + \sum_{i\le k,\, j<l} a_{ij1} = A$, $\sum_{i<k,\, i+j\ge k+l} a_{ij0} + \sum_{i\le k,\, i+j>k+l} a_{ij1} = B$ и $\sum_{j<l,\, i+j\ge k+l} a_{ij0} + \sum_{j\le l,\, i+j>k+l} a_{ij1} = C$. Найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от A, B и C. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

Решение. Как и в задаче 2.1, обозначим через S сумму чисел в таблице, тогда сумма чисел в любой строке, параллельной одной из сторон шестиугольника, будет $\frac{S}{8}$. Суммы в оставшихся трех частях также обозначим соответственно, через X, Y и Z, как показано на рисунке 2.8. Будет выполняться равенство (2.1) $A+B+C+X+Y+Z=S$.

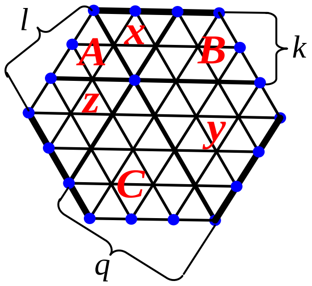


Рисунок 2.8

Существует всего 6 принципиально различных случаев выбора узла, которые указаны на рисунке 2.9. Все остальные можно свести к этим шести, путем поворота или зеркального отображения. Но 5 из них (кроме центрального узла) допускают два расположения секторов с известными суммами, при чередовании их с секторами с неизвестными суммами. То есть, получаем 11 систем уравнений, подобных системе (2.2). Одну из них, а именно систему (2.2) мы уже рассмотрели. Осталось решить еще десять систем.

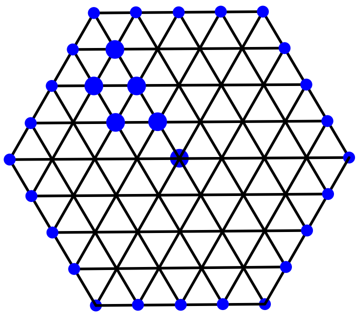


Рисунок 2.9

Приведем ниже все эти оставшиеся десять систем.

$$\begin{cases} A+X+B=S/8; \\ X+B+Y=4S/8; \\ B+Y+C=7S/8; \\ Y+C+Z=7S/8; \\ C+Z+A=4S/8; \\ Z+A+X=S/8; \end{cases} \quad \begin{cases} A+X+B=S/8; \\ X+B+Y=S/8; \\ B+Y+C=4S/8; \\ Y+C+Z=7S/8; \\ C+Z+A=7S/8; \\ Z+A+X=4S/8; \end{cases} \quad \begin{cases} A+X+B=2S/8; \\ X+B+Y=5S/8; \\ B+Y+C=7S/8; \\ Y+C+Z=6S/8; \\ C+Z+A=3S/8; \\ Z+A+X=S/8; \end{cases} \quad \begin{cases} A+X+B=S/8; \\ X+B+Y=2S/8; \\ B+Y+C=5S/8; \\ Y+C+Z=7S/8; \\ C+Z+A=6S/8; \\ Z+A+X=3S/8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+X+B=2S/8;\\ X+B+Y=4S/8;\\ B+Y+C=6S/8;\\ Y+C+Z=6S/8;\\ C+Z+A=4S/8;\\ Z+A+X=2S/8; \end{cases} \quad \begin{cases} A+X+B=2S/8;\\ X+B+Y=2S/8;\\ B+Y+C=4S/8;\\ Y+C+Z=6S/8;\\ C+Z+A=6S/8;\\ Z+A+X=4S/8; \end{cases} \quad \begin{cases} A+X+B=3S/8;\\ X+B+Y=5S/8;\\ B+Y+C=6S/8;\\ Y+C+Z=5S/8;\\ C+Z+A=3S/8;\\ Z+A+X=2S/8; \end{cases} \quad \begin{cases} A+X+B=2S/8;\\ X+B+Y=3S/8;\\ B+Y+C=5S/8;\\ Y+C+Z=6S/8;\\ C+Z+A=5S/8;\\ Z+A+X=3S/8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+X+B=3S/8;\\ X+B+Y=3S/8;\\ B+Y+C=4S/8;\\ Y+C+Z=5S/8;\\ C+Z+A=5S/8;\\ Z+A+X=4S/8; \end{cases} \quad \begin{cases} A+X+B=4S/8;\\ X+B+Y=4S/8;\\ B+Y+C=4S/8;\\ Y+C+Z=4S/8;\\ C+Z+A=4S/8;\\ Z+A+X=4S/8. \end{cases}$$

Сложив первое, третье и пятое уравнения каждой системы и вычтя из полученной суммы уравнение (2.1) для каждой из систем, соответственно, получаем $A+B+C=4S/8$. Откуда находим $S=2(A+B+C)$.

Примеры строятся аналогично, как и для задачи 2.1. Вокруг выбранного узла помещаем по порядку значения A, $\frac{C-3A-3B}{4}$, B, $\frac{A-3B-3C}{4}$, C, $\frac{B-3A-3C}{4}$. Затем по три клетки, параллельно каждой из сторон, заполняем числами $\frac{A+B+C}{4}$, остальные нули.

Заметим, что на координаты выбранного узла накладываются естественные ограничения. А именно,

$$\begin{cases} 0<k<2n;\\ 0<l<2n;\\ 0<3n-k-l<2n. \end{cases} \qquad \textbf{(2. 4)}$$

Из третьего неравенства (2.4) вытекает, что $n < k + l < 3n$. С учетом того, что в условии задачи 2.2 имеем $n = 4$, получаем следующую систему ограничений.

$$\begin{cases} 0<k<8;\\ 0<l<8;\\ 4<k+l<12. \end{cases} \qquad \textbf{(2. 5)}$$

Ответ. Если $0 < k < 8$, $0 < l < 8$ и $4 < k + l < 12$, то сумма всех чисел в таблице равна $S=2(A+B+C)$.

По аналогии с задачей 2.2 можно рассмотреть шестиугольные таблицы других размеров.

Задача 2.3. Пусть задана шестиугольная таблица (правильный шестиугольник), каждая сторона которой разбита на n равных частей. Через каждую точку разбиения проведены прямые, параллельные сторонам этой таблицы. В получившейся сетке выбран узел с координатами $(k; l)$, как показано на рисунке 2.8. Через него проходят три прямые, параллельные сторонам шестиугольника и разбивающие его на 6 частей. В каждую клетку таблицы с координатами $(i; j; r)$ записано некоторое число a_{ijr}. Суммы чисел во всех строках таблицы одинаковы, и известно $\sum\limits_{i<k,\, j\le l} a_{ij0} + \sum\limits_{i\le k,\, j<l} a_{ij1} = A$, $\sum\limits_{i<k,\, i+j\ge k+l} a_{ij0} + \sum\limits_{i\le k,\, i+j>k+l} a_{ij1} = B$ и

$\sum\limits_{j<l,\, i+j\geq k+l} a_{ij0} + \sum\limits_{j\leq l,\, i+j>k+l} a_{ij1} = C$. Найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от *A*, *B* и *C*. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

Решение. Обозначим через *S* сумму чисел в таблице, тогда сумма чисел в любой строке, параллельной одной из сторон шестиугольника, будет $\frac{S}{2n}$. В трех не смежных частях, шестиугольника заданы суммы *A*, *B*, *C*, как показано на рисунке 2.8. Узел решетки выбирается с произвольными координатами k, l, q. Суммы в трех оставшихся частях таблицы обозначим *X*, *Y* и *Z*, как показано на рисунке 2.8.

Находим сумму в k верхних строках, l левых нижних и q правых нижних. Получаем следующую систему уравнений для нахождения *S*.

$$\begin{cases} A+X+B=k\cdot\frac{S}{2n}; \\ A+Z+C=l\cdot\frac{S}{2n}; \\ B+Y+C=q\cdot\frac{S}{2n}. \end{cases} \qquad \textbf{(2. 6)}$$

Во введенных обозначениях верно равенство (2.1) $A + B + C + X + Y + Z = S$.

Сложим три уравнения системы (2.6) и вычтем из полученной суммы равенство (2.1). Получим $A + B + C = (k+l+q)\cdot\frac{S}{2n} - S$. С учетом леммы 2.1, получаем, что $A + B + C = 3n\cdot\frac{S}{2n} - S = \frac{S}{2}$. Откуда $S = 2(A + B + C)$.

Примеры того, что такие таблицы существуют, строятся аналогично как выше. Вокруг выбранного узла помещаем по порядку значения *A*, $\frac{C-(n-1)A-(n-1)B}{n}$, *B*, $\frac{A-(n-1)B-(n-1)C}{n}$, *C*, $\frac{B-(n-1)A-(n-1)C}{n}$. Затем по $(n-1)$ клетке, параллельно каждой из сторон, заполняем числами $\frac{A+B+C}{n}$, остальные нули.

Заметим, что на координаты выбранного узла накладываются естественные ограничения (2.4). Поэтому k и l – натуральные числа, для которых $0 < k < 2n$, $0 < l < 2n$ и $n < k + l < 3n$. Таким образом, для шестиугольных таблиц предложенная на РТЮМе задача решена полностью.

Ответ. Если $0 < k < 2n$, $0 < l < 2n$ и $n < k + l < 3n$, то сумма всех чисел в таблице равна $S = 2(A+B+C)$.

3. ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ ТАБЛИЦ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ЭЛЕМЕНТОВ

Будем рассматривать задачи, аналогичное задачам в первом разделе, но вместо суммы чисел будем вычислять их произведение.

3.1 Произведение чисел в прямоугольной таблице, разбитой на четыре части

Рассмотрим полный аналог задачи 1.1, но для произведения чисел в таблице.

Задача 3.1. Пусть имеется прямоугольная таблица $m\times n$, заполненная положительными числами. Произведение чисел в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы равно A, а в правом нижнем прямоугольнике $(m–k)\times(n–l)$ этой таблицы равно B. При этом k и l натуральные числа, меньшие чем m и n соответственно. А числа A и B положительные. При этом известно, что произведения чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые. Найдите произведение всех чисел в таблице.

Решение. Для решения обозначим P – произведение чисел во всей таблице. Тогда, так как произведения чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые, то $\sqrt[m]{P}$ – произведение чисел в одной строке, $\sqrt[n]{P}$ – произведение чисел в одном столбце. Обозначим для удобства произведение чисел в правом верхнем прямоугольнике $k\times(n–l)$ этой таблицы через X, как показано на рисунке 3.1. Тогда произведение чисел в k верхних строках таблицы равно $A\cdot X=(\sqrt[m]{P})^k$. Аналогично, $B\cdot X=(\sqrt[n]{P})^{n-l}$. Разделим второе равенство на первое и получим $\frac{B}{A}=P^{1-\frac{l}{n}-\frac{k}{m}}$.

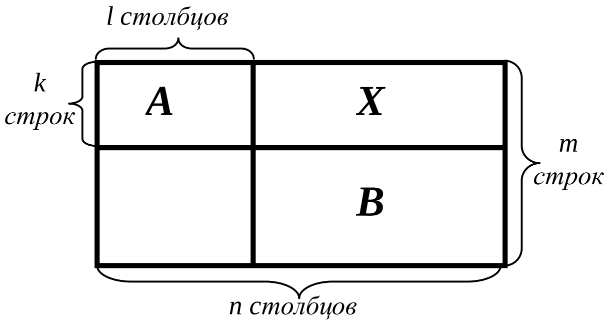


Рисунок 3.1 – Таблица, разбитая на 4 части

Если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}\neq 1$, то находим $P=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{mn}{mn-ml-nk}}$. При этом такие таблицы существуют, пример заполнения приведен на рисунке 3.2. При этом каждую клетку в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы заполним числами равными $A^{\frac{1}{k\cdot l}}$, а каждую клетку в правом нижнем прямоугольнике $(m–k)\times(n–l)$ этой таблицы заполнить числами равными $B^{\frac{1}{(m-k)\cdot(n-l)}}$, клетки в правом верхнем прямоугольнике $k\times(n–l)$ надо заполнить числами $P^{\frac{1}{m\cdot(n-l)}}\Big/A^{\frac{1}{k\cdot(n-l)}}$, клетки в левом нижнем прямоугольнике $(m–k)\times l$ надо заполнить числами $P^{\frac{1}{m\cdot l}}\Big/B^{\frac{1}{(m-k)\cdot l}}$.

l столбцов

k строк	$A^{\frac{1}{k\cdot l}}$	$P^{\frac{1}{m\cdot(n-l)}}\Big/A^{\frac{1}{k\cdot(n-l)}}$	m строк
	$P^{\frac{1}{m\cdot l}}\Big/B^{\frac{1}{(m-k)\cdot l}}$	$B^{\frac{1}{(m-k)\cdot(n-l)}}$	

n столбцов

Рисунок 3.2 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}\ne 1$

Тогда в любой из первых k строк произведение будет равно $\left(A^{\frac{1}{k\cdot l}}\right)^{l}\cdot\left(P^{\frac{1}{m\cdot(n-l)}}\Big/A^{\frac{1}{k\cdot(n-l)}}\right)^{n-l}=A^{\frac{1}{k}}\cdot P^{\frac{1}{m}}\Big/A^{\frac{1}{k}}=P^{\frac{1}{m}}.$

В любой из последних $n-k$ строк произведение будет равно $\left(P^{\frac{1}{m\cdot l}}\Big/B^{\frac{1}{(m-k)\cdot l}}\right)^{l}\cdot\left(B^{\frac{1}{(m-k)\cdot(n-l)}}\right)^{n-l}=\left(P^{\frac{1}{m}}\Big/B^{\frac{1}{(m-k)}}\right)\cdot B^{\frac{1}{(m-k)}}=P^{\frac{1}{m}}.$

Чтобы показать, что произведение в каждом столбце равно $P^{\frac{1}{n}}$, нужно равенство $P=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{mn}{mn-ml-nk}}$ переписать в виде $P^{\frac{mn-ml-nk}{mnl(m-k)}}=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{l(m-k)}}$ или $P^{\frac{1}{ml}-\frac{1}{n(m-k)}}=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{l(m-k)}}$. Тогда получим, что $P^{\frac{1}{ml}}\Big/B^{\frac{1}{l(m-k)}}=P^{\frac{1}{n(m-k)}}\Big/A^{\frac{1}{l(m-k)}}$. И произведение в первых l столбцах можно вычислить следующим образом: $\left(A^{\frac{1}{k\cdot l}}\right)^{k}\cdot\left(P^{\frac{1}{n(m-k)}}\Big/A^{\frac{1}{l(m-k)}}\right)^{m-k}=A^{\frac{1}{l}}\cdot P^{\frac{1}{n}}\Big/A^{\frac{1}{l}}=P^{\frac{1}{n}}.$

Аналогично можно показать, что из $P=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{mn}{mn-ml-nk}}$ следует равенство $P^{\frac{mn-ml-nk}{mnk(n-l)}}=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{k(n-l)}}$ или $P^{\frac{1}{nk}-\frac{1}{m(n-l)}}=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{k(n-l)}}$. Откуда несложно вывести, что $P^{\frac{1}{m(n-l)}}\Big/A^{\frac{1}{k(n-l)}}=P^{\frac{1}{nk}}\Big/B^{\frac{1}{k(n-l)}}$. Тогда $\left(P^{\frac{1}{nk}}\Big/B^{\frac{1}{k(n-l)}}\right)^{k}\cdot\left(B^{\frac{1}{(m-k)(n-l)}}\right)^{m-k}=\left(P^{\frac{1}{n}}\Big/B^{\frac{1}{(n-l)}}\right)\cdot B^{\frac{1}{n-l}}=P^{\frac{1}{n}}.$

Таким образом, пример полностью удовлетворяет условию задачи и показывает, что искомые таблицы существуют.

Если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$, то чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $A=B$. И тогда произведение всех чисел в таблице может принимать любое значение P. При этом достаточно заполнить, как указано на рисунке 3.3. Проверка, что сумма в каждой строке равна $P^{\frac{1}{m}}$ осуществляется как и выше и достаточно проста. Для проверки того, что сумма в каждом столбце равна $P^{\frac{1}{n}}$ надо $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$ переписать в виде $\frac{1}{ml}=\frac{1}{n(m-k)}$ или $\frac{1}{m(n-l)}=\frac{1}{nk}$. А дальше проверка проводится аналогично.

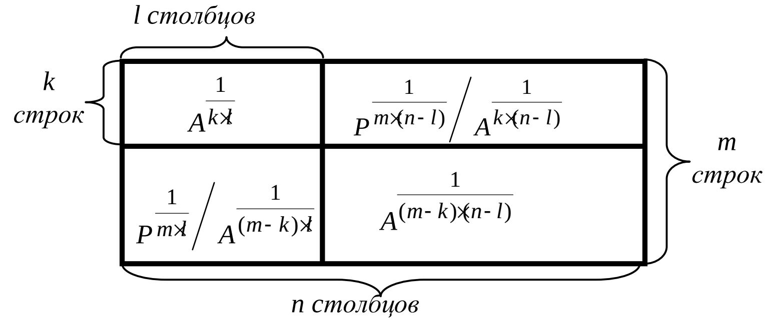


Рисунок 3.3 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A = B$

Ответ. Если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A \neq B$, то таких таблиц не существует.

Если $\frac{l}{n}+\frac{k}{m}=1$ и $A = B$, то произведение всех чисел в таблице может быть любым положительным числом P.

Если же $\frac{l}{n}+\frac{k}{m} \neq 1$, то произведение всех чисел в таблице $P=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{mn}{mn-ml-nk}}$.

3.1 Произведение чисел в прямоугольной таблице, разбитой на девять частей

Рассмотрим полный аналог задачи 1.3, но для произведения чисел в таблице.

Задача 3.1. Пусть имеется прямоугольная таблица $m\times n$, заполненная положительными числами. Произведение чисел в левом верхнем прямоугольнике $k\times l$ этой таблицы равна A, в правом верхнем прямоугольнике $k\times q$ равна B, в правом нижнем прямоугольнике $r\times q$ равна C, в левом нижнем прямоугольнике $r\times l$ равна D, а произведение чисел в центральном прямоугольнике, как показано на рисунке 3.4, $(m–k–r)\times(n–l–q)$ этой таблицы равна F. Понятно, что k, l, r и q натуральные числа, такие, что суммы $k + r$ и $l + q$ меньше чем m и n соответственно. А числа A, B, C, D и F положительные. При этом известно, что произведения чисел во всех строках таблицы одинаковые и произведения чисел во всех столбцах таблицы одинаковые. Найдите произведения всех чисел в таблице.

Решение. Для решения обозначим P – произведение чисел во всей таблице. Тогда, так как произведения чисел во всех строках таблицы одинаковые и во всех столбцах таблицы одинаковые, то $\sqrt[m]{P}$ – произведение чисел в одной строке, $\sqrt[n]{P}$ – произведение чисел в одном столбце. Обозначим для удобства произведения чисел в двух прямоугольниках, как показано на рисунке, через X и Y, как показано на рисунке 3.4. Тогда получаем.

$$\begin{cases} A\cdot X\cdot B=P^{\frac{k}{m}}; \\ D\cdot Y\cdot C=P^{\frac{r}{m}}; \\ X\cdot F\cdot Y=P^{\frac{n-l-q}{n}}. \end{cases} \qquad (3.1)$$

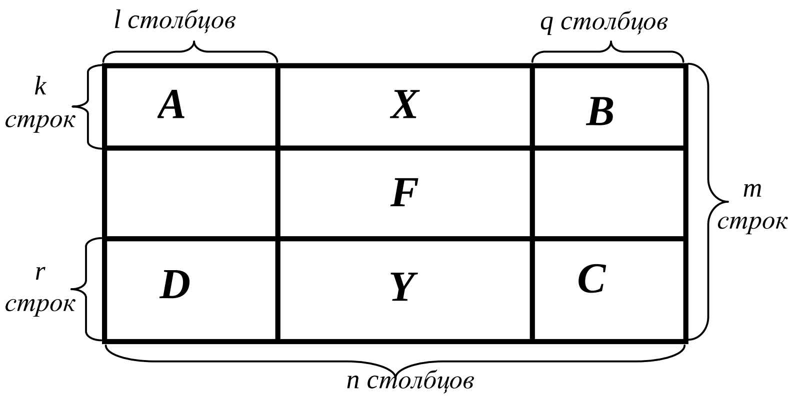


Рисунок 3.4 – Таблица, разбитая на 9 частей

Третье уравнение системы (3.1) разделим на первое и на второе. Это можно сделать, так как все числа положительные. Получим уравнение

$$\frac{F}{A\cdot B\cdot C\cdot D}=P^{\frac{n-l-q}{n}-\frac{k}{m}-\frac{r}{m}}=P^{1-\frac{l}{n}-\frac{q}{n}-\frac{k}{m}-\frac{r}{m}}. \qquad \textbf{(3. 2)}$$

Если $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}\neq 1$, то находим

$$P=\left(\frac{F}{A\cdot B\cdot C\cdot D}\right)^{\frac{mn}{mn-m(l+q)-n(k+r)}}. \qquad \textbf{(3. 3)}$$

При этом такие таблицы существуют, достаточно каждую клетку таблицы заполнить указанными на рисунке 3.5 в соответствующих прямоугольниках числами.

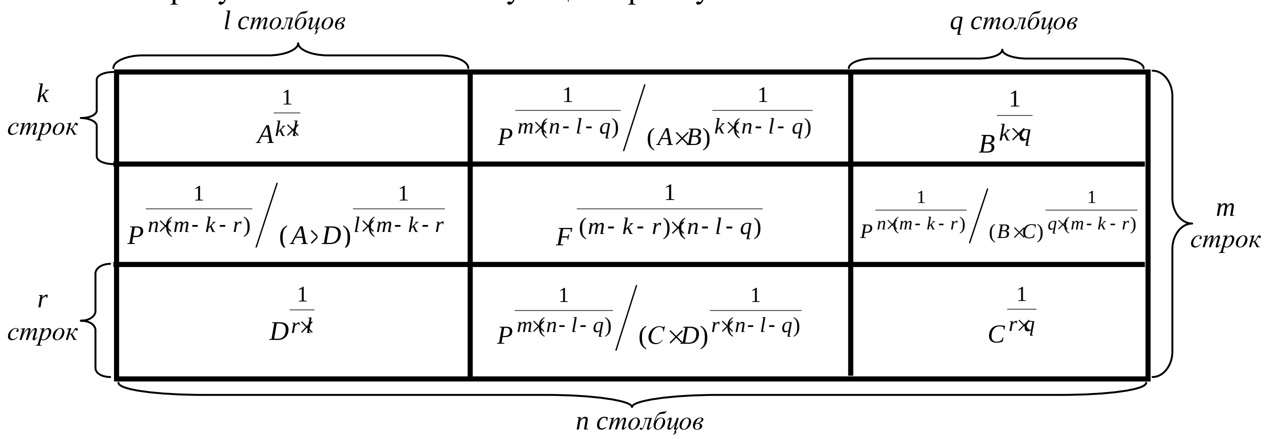


Рисунок 3.5 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}\neq 1$

Произведения чисел в соответствующих прямоугольниках, будут A, B, C, D и F, так как стоящие в них числа одинаковы, и их нужно только возвести в степень, равную произведению сторон соответствующего прямоугольника. Произведение чисел в верхних k и нижних r строках очевидно $P^{\frac{1}{m}}$. Как и произведение в левых l и правых q столбцах равно $P^{\frac{1}{n}}$. Чтобы показать, что произведение чисел в остальных строках равно $P^{\frac{1}{m}}$ и в остальных столбцах равно $P^{\frac{1}{n}}$, надо использовать вытекающее из (3.3) равенство

$P^{\frac{mn-m(l+q)-n(k+r)}{mn(n-l-q)}} = \left(\frac{F}{A\cdot B\cdot C\cdot D}\right)^{\frac{1}{n-l-q}}$ и то, что $P^{\frac{k+r}{m(n-l-q)}+\frac{mn-m(l+q)-n(k+r)}{mn(n-l-q)}} = P^{\frac{1}{n}}$, а также вытекающее из (3.3) равенство $P^{\frac{mn-m(l+q)-n(k+r)}{mn(m-k-r)}} = \left(\frac{F}{A\cdot B\cdot C\cdot D}\right)^{\frac{1}{m-k-r}}$ и то, что $P^{\frac{l+q}{n(m-k-r)}+\frac{mn-m(l+q)-n(k+r)}{mn(m-k-r)}} = P^{\frac{1}{m}}$.

Если $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$, то чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $F = A\cdot B\cdot C\cdot D$. И тогда произведение всех чисел в таблице может принимать любое значение P. При этом достаточно заполнить каждую клетку таблицы заполнить указанными на рисунке 3.6 в соответствующих прямоугольниках числами.

l столбцов *q столбцов*

k строк	$A^{\frac{1}{k\cdot l}}$	$P^{\frac{1}{m\cdot(n-l-q)}} \big/ (A\cdot B)^{\frac{1}{k\cdot(n-l-q)}}$	$B^{\frac{1}{k\cdot q}}$	*m строк*
	$P^{\frac{1}{n\cdot(m-k-r)}} \big/ (A\cdot D)^{\frac{1}{l\cdot(m-k-r)}}$	$(A\cdot B\cdot C\cdot D)^{\frac{1}{(m-k-r)\cdot(n-l-q)}}$	$P^{\frac{1}{n\cdot(m-k-r)}} \big/ (B\cdot C)^{\frac{1}{q\cdot(m-k-r)}}$	
r строк	$D^{\frac{1}{r\cdot l}}$	$P^{\frac{1}{m\cdot(n-l-q)}} \big/ (C\cdot D)^{\frac{1}{r\cdot(n-l-q)}}$	$C^{\frac{1}{r\cdot q}}$	

n столбцов

Рисунок 3.6 – Схема заполнения таблицы, если $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$ и $F = A\cdot B\cdot C\cdot D$

Произведения чисел в соответствующих прямоугольниках, будут A, B, C, D и F, так как стоящие в них числа одинаковы, и их нужно только возвести в степень, равную произведению сторон соответствующего прямоугольника. Произведение чисел в верхних k и нижних r строках очевидно $P^{\frac{1}{m}}$. Как и произведение в левых l и правых q столбцах равно $P^{\frac{1}{n}}$. А используя то, что из $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$ следует $\frac{l+q}{n}=\frac{m-k-r}{m}$ и $\frac{k+r}{m}=\frac{n-l-q}{n}$, легко показать, что сумма чисел в каждой оставшейся строке $P^{\frac{l+q}{n(m-k-r)}} = P^{\frac{1}{m}}$, в каждом столбце $P^{\frac{k+r}{m(n-l-q)}} = P^{\frac{1}{n}}$.

Если же $F \neq A\cdot B\cdot C\cdot D$, а $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$, то $P^0 \neq 1$, чего быть не может. В этом случае таких таблиц не существует.

Таким образом, предложенная нами задача для произведений также полностью решена.

Ответ. Если $F \neq A\cdot B\cdot C\cdot D$, а $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$, то таких таблиц не существует.

Если $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}=1$ и $F = A\cdot B\cdot C\cdot D$, то произведение всех чисел в таблице может быть любым положительным числом P.

Если же $\frac{l}{n}+\frac{q}{n}+\frac{k}{m}+\frac{r}{m}\neq 1$, то произведение всех чисел в таблице $P=\left(\frac{F}{A\cdot B\cdot C\cdot D}\right)^{\frac{mn}{mn-m(l+q)-n(k+r)}}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была полностью решена предложенная на турнире юных математиков задача 4 «Суммы в таблицах» [1], а также предложены и решены сразу несколько ее обобщений. Так первые два пункта этой задачи были обобщены на случай прямоугольной таблицы в подразделах 1.1 и 1.3 соответственно. Также в разделе 3 рассмотрено и решено обобщение этих пунктов задачи на случай, когда вместо суммы элементов в таблице рассматривается их произведение. Результаты подраздела 3.1 предлагались еще на самом турнире. А результаты, полученные в подразделе 3.2, найдены были позже и предлагались уже на XXV республиканский конкурс работ исследовательского характера (конференция) учащихся по астрономии, биологии, информатике, математике, физике, химии. Результаты, найденные в подразделах 1.2 и 1.4, являются новыми и нигде ранее не представлялись.

Также хочется отметить, что во всех случаях было доказано существование искомых таблиц. Это подчеркивает, что задачи были заданы корректно. Без приведенных примеров оставался бы невыясненным вопрос, насколько корректно мы сформулировали задачу для прямоугольных таблиц. Сейчас же можно сказать, что задача для прямоугольных таблиц и в случае суммы, и в случае произведения элементов таблицы сформулирована корректно и полностью решена. Наиболее сложным при решении и было доказательство существования таблиц с необходимыми свойствами. Особый интерес эти примеры имеют в подразделе 1.4 и в разделе 2.

В задаче можно увидеть многие идеи дальнейшего ее развития. Например, рассмотреть разбиение таблицы не на четыре, шесть, девять или двенадцать частей, а и на шестнадцать, двадцать пять, двадцать. И в общем случае $M \times N$. Или же рассмотреть трехмерные таблицы вместо двумерных. Но это идеи для дальнейшего исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. https://uni.bsu.by/arrangements/turnir/rtum22_2020/zadan_rtum22.doc

2. Задачи Минской городской математической олимпиады младших школьников : 2005-2012 гг. / Е.А.Барабанов [и др.]. – Минск : Белорус. ассоц. «Конкурс», 2016. – 303с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задача 4. Суммы в таблицах (XXII Республиканский турнир юных математиков**)**

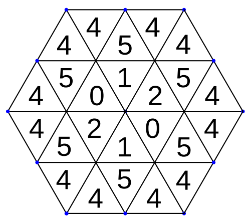
I. Обозначим a_{ij} – число, записанное в i-ой строке и j-ом столбце таблицы $n \times n$. При этом известно, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах таблицы одинаковые. Кроме того, $\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\right)=A$ и $\sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}\right)=B$. Найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от n, k, A и B. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все. Решите задачу в случае, если:

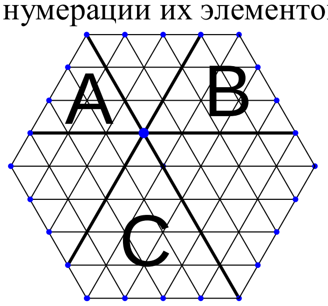
1) $n = 5$, $k = 2$, $A = 10$ и $B = 15$;
2) $n = 5$, $k = 2$, A и B — произвольные действительные числа;
3) $n = 4$, $k = 2$, A и B — произвольные действительные числа;
4) $n = 2k$, а k, A и B — произвольные действительные числа;
5) n, k, A и B — произвольные действительные числа.

II. Опять суммы чисел во всех строках и во всех столбцах таблиц одинаковые. При этом натуральное число k таково, что $2k < n$ и сумма чисел в каждом из четырех угловых квадратов $k \times k$ таблицы $n \times n$ равна A, а сумма чисел в центральном квадрате $(n - 2k) \times (n - 2k)$ равна B. Найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от n, k, A и B. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все. Решите задачу в случае, если:

1) $n = 7$, $k = 2$, $A = 10$ и $B = 25$;
2) $n = 7$, $k = 2$, A и B – произвольные действительные числа;
3) $n = 6$, $k = 2$, A и B – произвольные действительные числа;
4) $n = 8$, $k = 2$, A и B – произвольные действительные числа;
5) n, k, A и B – произвольные действительные числа.

III. Рассмотрите аналогичную задачу, но на шестиугольной таблице. Опять суммы чисел во всех строках таблиц, параллельных одной из сторон, одинаковые. В приведенном примере (см. рисунок справа) в шестиугольнике каждая сторона разбита на $n = 2$ части и суммы в каждой из двенадцати строк равны 21. Для четкой формализации задачи попробуйте дать определение понятия строк в шестиугольной таблице и нумерации их элементов.





1) Пусть $n = 4$, то есть каждая сторона разбита на 4 части. Выберем один узел получившейся треугольной решетки, как показано на рисунке. Через него проходят три прямые, параллельные сторонам шестиугольника и разбивающие его на 6 частей. Будем считать, что суммы чисел в трех из этих шести частей нам известны, это A, B и C, как показано на рисунке. Найдите сумму всех чисел в таблице в зависимости от A, B и C. Если сумма может принимать несколько значений, найдите их все.

2) Решите эту же задачу для остальных возможных случаев выбора узла треугольной решетки.

3) Рассмотрите шестиугольные таблицы с другими значениями n.

IV. Предложите свои обобщения данной задачи и решите их.