ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГИМНАЗИЯ №3 Г. ГРОДНО»

Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

«Неординарное представление известной последовательности»

Авторы работы:

Доминич Роман Игоревич, 8 класс
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»,
Мельников Александр Андреевич, 9 класс
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»,

Руководитель работы:

Разумов Евгений Владимирович, учитель математики, магистр педагогических наук,
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»

г. Гродно, 2020 г.

Оглавление

Введение

Нам часто приходится сталкиваться с подсчётом вариантов того или иного события как в реальной жизни, так и на уроках математики, и на олимпиадах в частности. В этом нам часто помогает комбинаторика. В комбинаторных задачах для их решения используются разные способы, это может быть полный или ограниченный перебор вариантов или использование специальных комбинаторных формул. В более редких случаях, где для некоторого заданного натурального n необходимо найти количество способов какой-либо расстановки n элементов можно прибегнуть к целочисленным последовательностям.

На шестом Минском городском открытом турнире юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) в 2019 году была предложена задача «Письма» [1]. При решении данной задачи была выдвинута гипотеза, что количество различных порядков отправления писем совпадает с количеством триангуляций правильного $(n+2)$-угольника. В данной работе рассмотрим истинность выдвинутого предположения. Некоторые частные случаи задачи рассмотрены в книге «Семь шагов» [2], но не общий случай, который изучим в этой работе.

Объект исследования: последовательности с заданными свойствами.

Предмет исследования: количество всевозможных порядков отправления писем.

Цель работы: доказать, что количество различных порядков отправления писем совпадает с количеством триангуляций правильного $(n+2)$-угольника.

На основании сформулированной цели определим ряд **задач** исследования:

1) Определить возможный порядок отправления писем.
2) Найти количество способов отправления n писем.
3) Доказать, что полученная рекуррентная формула совпадает с формулой количества триангуляций $(n+2)$-угольника.

Основная часть
Общая теория

Последовательность чисел Каталана (числа Каталана) – последовательность чисел $\{C_n\}$, которая выражает количество триангуляций $(n+2)$-угольника (разрезание его на треугольники непересекающимися диагоналями). Кроме этого определения у данной последовательности есть множество других способов выражения, такие как:

-количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$;

-количество способов соединения $2n$ точек на окружности n - не пересекающимися хордами;

-количество способов полностью разделить скобками $n+1$ множитель;

-количество способов заполнить лестницу ширины и высоты n прямоугольниками;

-количество кортежей $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из n натуральных чисел, что $x_1 = 1$ $x_i \leq x_{i-1} + 1$ при $2 \leq i \leq n$;

-количество неизоморфных упорядоченных бинарных деревьев с корнем и $(n+1)$ листьями;

-количество всевозможных способов линеаризации декартова произведения двух линейных упорядоченных множеств: из 2 и из n элементов [3].

Также у данной последовательности существуют несколько известных рекуррентных и нерекуррентных формул представления:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1}(C_i \cdot C_{n-i-1}), \forall C_n \in \mathbb{N}, C_0 = 1 \quad (1)$$

$$C_n = \frac{(2 \cdot n)!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{2^n \cdot (2 \cdot n - 1)!!}{(n+1)!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k}{1+k}.$$

Исследовательская часть

На шестом Минском городском открытом турнире юных математиков в 2019 году была предложена задача «Письма», в которой предлагается рассмотреть следующую комбинаторную задачу.

Сотрудникам почты необходимо разослать n писем. Время от времени начальник опускает очередное письмо в конверт и кладет его на уже лежащую стопку с конвертами. Его помощник время от времени берет самый верхний конверт из стопки и отдает его почтальону для отправки. Будем считать, что письма, которые кладет начальник, пронумерованы им по порядку, начиная с 1. Сколько всего может получиться различных порядков отправления писем?

Введём последовательность $\{P_n\}$ такую, что P_n совпадает с количеством способов отправки n писем.

Сформулируем и докажем лемму:

Лемма 1. Если письмо №1 помощник взял после m $(\mathrm{m} \in \mathbb{N}_0)$ некоторых других писем, то эти m писем были пронумерованы номерами $2, 3 \ldots, m, (m+1)$ в некотором порядке.

Доказательство:

Докажем методом от противного. Пусть среди этих m писем было хотя бы одно с номером, большим $(m+1)$. Пусть, не нарушая общности, это письмо №$(\mathrm{m}+\alpha\ )$ $(\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \neq 1\ )$. Так как помощник, по предположению, до письма №1 вытянул ровно m писем, среди которых было письмо №$(\mathrm{m}+\alpha)$, то по принципу Дирихле получим, что существует письмо № i $(i \in \mathbb{N})$, такое, что $i \in (1; (m+1)]$ и оно было взято после письма №1.

Рассмотрим письма №i и №1. Они, по предположению, были взяты помощником после письма №$(\mathrm{m}+\alpha)$, значит, они уже лежат в стопке писем, так как если положено оно, то положены и все письма, номера которых меньше. Письмо №i лежит выше в стопке писем, чем письмо №1, так как было положено туда позже письма №1, что и показывает его номер. Если оно лежит выше в стопке, то оно будет раньше взято помощником, чем письмо №1, так как помощник постепенно, идя сверху вниз, забирая письма, дойдёт раньше до письма №i и возьмёт его, пока письмо №1 будет лежать в стопке. Отсюда получаем противоречие, так как с одной стороны письмо №i было взято позже письма №1, а с другой наоборот.

Значит, наше предположение неверно и лемма доказана.

Для нахождения количества способов отправления n писем выведем и докажем следующую теорему:

Теорема 1. Количество различных порядков отправления n писем вычисляется по следующей формуле:

$$P_n = \sum_{m=0}^{n-1}(P_m \cdot P_{n-m-1}), \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (2)$$

где P_0 определим за 1.

Доказательство:

Рассмотрим все возможные позиции, на которых может стоять письмо №1 и сколько при этом может быть расстановок остальных писем. Пусть письмо №1 помощник вытянул после m некоторых других. Тогда, по Лемме 1, получаем, что до этого помощник вытянул письма №2, №3, …, №m, №$(m+1)$.

Соответственно после того, как помощник отдал письмо №1 почтальону, он в некотором порядке вытянул письма №$(m+2)$, №$(m+3)$, …, №n.

Разобьём все письма на 3 промежутка:

1) письма от №2 до №$(m+1)$;
2) письма от №$(m+2)$ до №n;
3) письмо №1;

В промежутке 1) переномеруем все письма следующим образом: №2 в №1; №3 в №2; …; №$(m+1)$в №m, тогда количество различных отправлений этих писем равно P_m.

В промежутке 2) переномеруем все письма следующим образом: №$(m+2)$ в №1; №$(m+3)$ в №2; …; №n в №$(n-m-1)$. Тогда количество различных отправок $(n-m-1)$ письма равно P_{n-m-1}. Значит количество различных отправок писем равно $P_m \cdot P_{n-m-1}$ для промежутка 1) и 2) и конкретного значения m.

Так как m пробегает все значения от 0 до $(n-1)$ (перед письмом №1 могло быть отправлено от 0 до $(n-1)$ письма), то количество различных отправок n писем равно

$\sum_{m=0}^{n-1}(P_m \cdot P_{n-m-1})$.

Теорема доказана.

Таким образом нами была получена рекуррентная формула представления полученной последовательности $\{P_n\}$. Несложно заметить её полное сходство с формулой чисел Каталана (1). Докажем методом математической индукции.

Предположение индукции: $P_i = C_i, \forall i \in \mathbb{N}_0$.

База индукции:

$P_0 = 1$, $C_0 = 1$, значит $P_0 = C$.

База доказана.

Шаг индукции:

Пусть при $i = n_0$ верно $P_{n_0} = C_{n_0}, \forall n_0 < n$, тогда

$\sum_{m=0}^{n-1}(C_m \cdot C_{n-m-1}) = \sum_{m=0}^{n-1}(P_m \cdot P_{n-m-1})$. Учитывая, что

$C_n = \sum_{m=0}^{n-1}(C_m \cdot C_{n-m-1})$, а $P_n = \sum_{m=0}^{n-1}(P_m \cdot P_{n-m-1})$, значит и $C_n = P_n$. Шаг доказан.

Так как база индукции верна и из справедливости утверждения при $i = n_0, \forall n_0 < n$ следует его справедливость для $i = n$, то согласно принципу математической индукции предположение справедливо при всех натуральных i.

Таким образом нами доказано, что последовательность $\{P_n\}$ совпадает с $\{C_n\}$, следовательно, совпадает с последовательностью чисел Каталана. Что приводит нас к новому возможному определению последовательности Каталана.

Далее рассмотрим выпуклый, не обязательно правильный, $(n+2)$-угольник. За T_{n+2} обозначим количество различных разрезаний $(n+2)$-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники.

Выберем некоторую вершину многоугольника, обозначим её №1, а далее по часовой стрелке остальные вершины пронумеруем №2,№$3, \dots,$№ $(n+2)$ соответственно каждой следующей вершине.

Утверждение 1. Рассмотрим треугольник: Очевидно, что его можно всего одним способом разрезать на треугольники – не разрезая его вовсе. Значит $T_3 = 1$.

Утверждение 2. Если из вершины №k не исходит ни одной диагонали, то вершины №$(k-1)$ и №$(k+1)$ соединены ребром, чтобы при разрезании из данных трех вершин образовывался треугольник.

Рассмотрим вершину №1:

Если из неё не исходит диагоналей, то по *Утверждению 2* вершины №2 и №$(n+2)$ соединены ребром, отсюда имеем, что исходный $(n+2)$-угольник разбивается на один треугольник и один $(n+1)$-угольник с вершинами №2, №3, …, №$(n+2)$, получаем $T_3 \cdot T_{n+1}$, то есть T_{n+1} способов.

Пусть из вершины №1 исходит ровно r диагоналей $(r \in [1;(n-1)])$ в вершины $t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1}$. Рассмотрим диагональ, соединяющую вершины №1 и № t_0. Тогда возможны 2 случая:

1) $t_0 = 3$, тогда получаем разбиение $(n+2)$-угольника на треугольник и $(n+1)$-угольник с вершинами №3, №4, …, №$(n+2)$ и №1, значит число его разбиений равно $T_3 \cdot T_{n+1}$, то есть T_{n+1} способов.

2) $t_0 > 3$, тогда рассмотрев t_0-угольник с вершинами №1, №2, …, № t_0 получим, что в данном многоугольнике вершина №1 не соединена ни с одной другой, значит Вершины №2 и № t_0 соединены диагональю и остаётся $(t_0 - 1)$-угольник, количество способов его разрезать равно T_{t_0-1}. Также остаётся $(n - t_0 + 4)$-угольник с вершинами № t_0, №(t_0+1), …, №$(n+2)$ и №1, количество способов его разрезаний равно T_{n-t_0+4}, а общее количество различных разрезаний равно $T_{t_0-1} \cdot T_{n-t_0+4}$, а так как t_0 пробегает все значения от 4 до $(n+1)$ отсюда имеем $\sum_{t_0=4}^{n+1}(T_{t_0-1} \cdot T_{n-t_0+4})$ способов разрезания.

Таким образом, сложив все случаи получим следующую формулу:

$T_{n+2} = 2 \cdot T_{n+1} + \sum_{t_0=4}^{n+1}(T_{t_0-1} \cdot T_{n-t_0+4}$. А заменив $(t_0 - 3)$ на k получим $T_{n+2} = 2 \cdot T_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-2}(T_{k+2} \cdot T_{n-k+1})$.

Определим T_2 за 1, тогда можно записать формулу в следующем виде:

$T_{n+2} = \sum_{k=0}^{n-1}(T_{k+2} \cdot T_{n-k+1})$.

Для доказательства того, что данная формула совпадает с таковой из Теоремы 1, воспользуемся методом математической индукции:

Предположение: $P_i = T_{i+2}, \forall i \in \mathbb{N}_0$.

База индукции:

$P_0 = 1$, $T_2 = 1$, значит $P_0 = T_2$.

База доказана.

Шаг индукции:

Пусть $P_{n_0} = T_{n_0+2}, \forall n_0 < n$, тогда

$\sum_{k=0}^{n-1}(T_{k+2} \cdot T_{n-k+1}) = \sum_{m=0}^{n-1}(P_m \cdot P_{n-m-1})$. Значит и

$T_{n+2} = \sum_{m=0}^{n-1}(P_m \cdot P_{n-m-1}) = P_n$. Значит, шаг доказан.

Значит и предположение верно. Таким образом мы получили, что количество всевозможных порядков отправления n писем равно количеству способов разрезать правильный $(n+2)$-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники, что является одним из определений последовательности Каталана.

Также нами получен другой способ доказательства – преобразование задачи о письмах в задачу о скобочных последовательностях.

Для начала скажем, что называется правильной скобочной последовательностью длины $2n$. Данная последовательность характеризуется 2 свойствами:

1) Это последовательность, содержащая 2 разных вида элементов, как правило это открывающаяся и закрывающаяся скобки («(» и «)»);

2) Взяв любой её промежуток от начала до любого другого места количество элементов первого типа не меньше количества элементов второго типа.

Переформулируем выше сказанное под условие поставленной ранее задачи:

1) Из условия понятно, что возможны всего 2 операции: либо начальник кладёт письмо в стопку, либо письмо забирает помощник;

2) На любом промежутке времени от начала до любого момента начальник положил суммарно в стопку писем не меньше, чем их взял помощник.

Поставим в соответствие открывающейся скобке появление письма в стопке, а закрывающейся скобке – его взятие оттуда, тогда наша задача сводится к последовательности чисел Каталана, ведь она является представлением правильной скобочной последовательности.

Заключение

В данной работе представлено решение задачи «Письма». Частные случаи этой задачи представлены в книге «Семь шагов» Антипова М. А. В процессе подготовки к Минскому городскому открытому турниру юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) возникла идея обобщить частные значения количества отправки писем. Была выдвинута гипотеза, что количество способов отправки n писем совпадает с соответствующим числом Каталана C_n. Для этого была выведена и доказана теорема 1, в которой сформулирована рекуррентная формула для подсчета количества способов отправки писем. Далее в работе с помощью метода математической индукции доказано, что эта формула совпадает с одним из рекуррентных представлений последовательности чисел Каталана. Также в работе присутствует другое доказательство выдвинутого предположения. Основные результаты получены автором самостоятельно и не рассмотрены ранее в литературе.

Числовые последовательности являются одним из основных понятий в математике. В школе им уделяется мало внимания, в то время как решение многих задач, в условии которых явно или неявно содержатся последовательности, развивает математическую интуицию, логику, а также совершенствует работу с различными математическими объектами.

В дальнейшем планируется найти другие необычные представления известных последовательностей.

Список использованных источников

1. Исследовательские задания VI Минского городского открытого турнира юных математиков (младшая лига – 5-7 классы). – Режим доступа: http://www.uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html – Дата доступа: 15.03.2020.
2. Антипов, М. А. Семь шагов. Олимпиады юношеской математической школы / М. А. Антипов, К. А. Кноп, А. М. Порецкий, А. А. Солынин. – М.:МЦНМО, 2016. – 224 с.
3. Спивак, А. Числа Каталана [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://www.mccme.ru/circles/oim/materials/spivak-04-1.pdf – Дата доступа: 15.03.2020.