**ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**
**«ГИМНАЗИЯ №3 Г. ГРОДНО»**

## Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

# «Красим по-латински»

Автор работы:

Кергет Артем Олегович, 6 класс
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»,

Руководители работы:

Разумов Евгений Владимирович, учитель математики, магистр педагогических наук, ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»

г. Гродно, 2020 г.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Задачи на раскраски регулярно встречаются на различных олимпиадах и математических боях. При этом зачастую необходимо найти раскраску в наименьшее количество цветов, таким образом, для решения подобных задач помимо примера нужно привести доказательство, что меньшем количеством цветов обойтись нельзя.

На седьмом Минском городском открытом турнире юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) в 2020 году была предложена задача «Красим по-латински». В данной работе предложено решение и обобщение этой задачи [1]. Помимо предложенной задачи про наибольшее число цветов для некоторых частных случаев квадратов и кубов, в работе рассмотрены общие задачи для прямоугольника $n \times m$, параллелепипеда $m \times n \times k$ и $n$-мерного параллелепипеда $\mathrm{k}_1 \times \mathrm{k}_2 \times \ldots \times \mathrm{k}_\mathrm{n}$.

**Объект исследования:** задачи на раскраски.

**Предмет исследования:** раскраска «по-латински».

**Цель работы:** найти минимальное количество цветов при раскраске по-латински квадрата, параллелепипеда, $n$-мерного параллелепипеда.

**Задачи:**

1. Каждая из девяти клеток квадрата 3×3 должна быть окрашена в один из нескольких цветов так, что ни в одной строчке, ни в одном столбце и ни на одной из двух главных диагоналей квадрата не нашлось бы двух клеток одинакового цвета. Будем называть такую раскраску латинской. Каким наименьшим количеством цветов можно обойтись?

2. Рассмотрите следующую раскраску квадрата 5×5. Первую строку раскрасим в цвета 1, 2, 3, 4, 5. Вторую строку раскрасим в цвета 3, 4, 5, 1, 2. Третью строку – в цвета 5, 1, 2, 3, 4. Четвертую – в цвета 2, 3, 4, 5, 1. Пятую – в цвета 4, 5, 1, 2, 3. Указать, все нечётные числа, для которых нельзя раскрасить по-латински квадрат соответствующих размеров с помощью указанного алгоритма.

3. Найти наименьшее количество цветов при раскраске по-латински для произвольного квадрата $n \times n$.

4. Найти в какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки прямоугольника $n \times m$, чтобы любые две клетки одного цвета не были соседними (ни по стороне, ни по вершине)?

5. Найти в какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки произвольного параллелепипеда ($n$-мерного параллелепипеда), чтобы любые две клетки одного цвета не были соседними (ни по стороне, ни по вершине)?

# ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

Введём систему координат. Вершина квадрата соответствует точке $(0;0)$, стороны квадрата лежат на осях координат. Каждой клетке квадрата присвоим координаты $(a;b)$.

Например, закрашенный квадрат на рисунке 1 имеет координаты $(2;2)$.

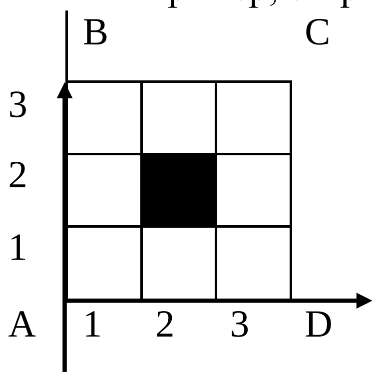



Рисунок 1

Будем называть рядом строку или столбец.

Рассмотрим следующую задачу. Каждая из девяти клеток квадрата 3×3 должна быть окрашена в один из нескольких цветов так, что ни в одной строчке, ни в одном столбце и ни на одной из двух главных диагоналей квадрата не нашлось бы двух клеток одинакового цвета. Будем называть такую раскраску латинской. Каким наименьшим количеством цветов можно обойтись?

Так как по главной диагонали квадрата 3×3 не могут располагаться клетки одинаковых цветов, то надо 3 цвета для покраски главной диагонали.

Пусть клетки диагонали покрашены в цвета 1,2,3, как показано на рисунке 2. Рассмотрим клетки с координатами $(1;1)$ и $(3;3)$, лежащие на другой главной диагонали. Каждая из них не может быть покрашена в цвет № 2 (так как одна клетка по диагонали уже покрашена в этот цвет), в цвета № 1 или № 3 (так как клетки этих цветов стоят в одних рядах с клетками $(1;1)$ и $(3;3)$), следовательно необходимо ещё как минимум два цвета. Таких образом, для покраски квадрата необходимо минимум 5 цветов.

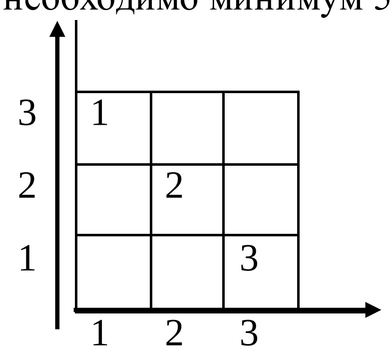



Рисунок 2

Пример раскраски квадрата 3×3 по-латински:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 |
| 3 | 2 | 1 |
| 5 | 4 | 3 |

Теперь рассмотрим квадрат 4×4. Так как ряд содержит 4 клетки, то для раскраски квадрата 4×4 необходимо минимум 4 цвета.

Пример раскраски квадрата 4×4 по-латински:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

Рассмотрим следующую раскраску квадрата 5×5. Первую строку раскрасим в цвета 1, 2, 3, 4, 5. Вторую строку раскрасим в цвета 3, 4, 5, 1, 2. Третью строку – в цвета 5, 1, 2, 3, 4. Четвертую – в цвета 2, 3, 4, 5, 1. Пятую – в цвета 4, 5, 1, 2, 3. Убедитесь что данная раскраска является латинской. Можно ли по такому же принципу раскрасить квадрат 7×7, 9×9, 11×11, … Если нет, то укажите, все нечётные числа, для которых нельзя раскрасить по-латински квадрат соответствующих размеров с помощью указанного алгоритма [1].

В предложенной раскраске происходит сдвиг по столбцам на 2, то есть если в клетке $(\mathrm{x},\mathrm{y})$ стоит цвет № A, то в клетке с координатами $(\mathrm{x};\mathrm{y}-1)$ стоит цвет №$(\mathrm{A}+2)$ по модулю $n$, где $n$ –сторона квадрата. Так как у нас задана верхняя строка квадрата в виде $1,2,3,\dots,n$, то рассмотрим главную диагональ квадрата $n\times n$. Пусть в клетке первой главной диагонали с координатами $(\mathrm{x};\mathrm{y})$ стоит цвет №A, тогда в клетке с координатами $(\mathrm{x}+1;\mathrm{y}-1)$ стоит цвет №$(\mathrm{A}+3)$ по модулю $n$.

Последовательно прибавляя к предыдущему цвету 3, мы пройдём все клетки первой главной диагонали. Все эти клетки будут раскрашены в разные цвета для любых $n$, таких что $(n;3)=1$.

Если же $(n;3)\neq 1$, то встретятся как минимум два одинаковых остатка по модулю $n$. Следовательно, данная раскраска является латинской для любых нечётных $n$ и взаимно простых с 3.

Докажем, что для квадрата $n\times n$, $n$ –нечётное и $\mathrm{n}\neq 3\mathrm{k}$, $\mathrm{k}\in\mathbb{N}$ данная раскраска является латинской.

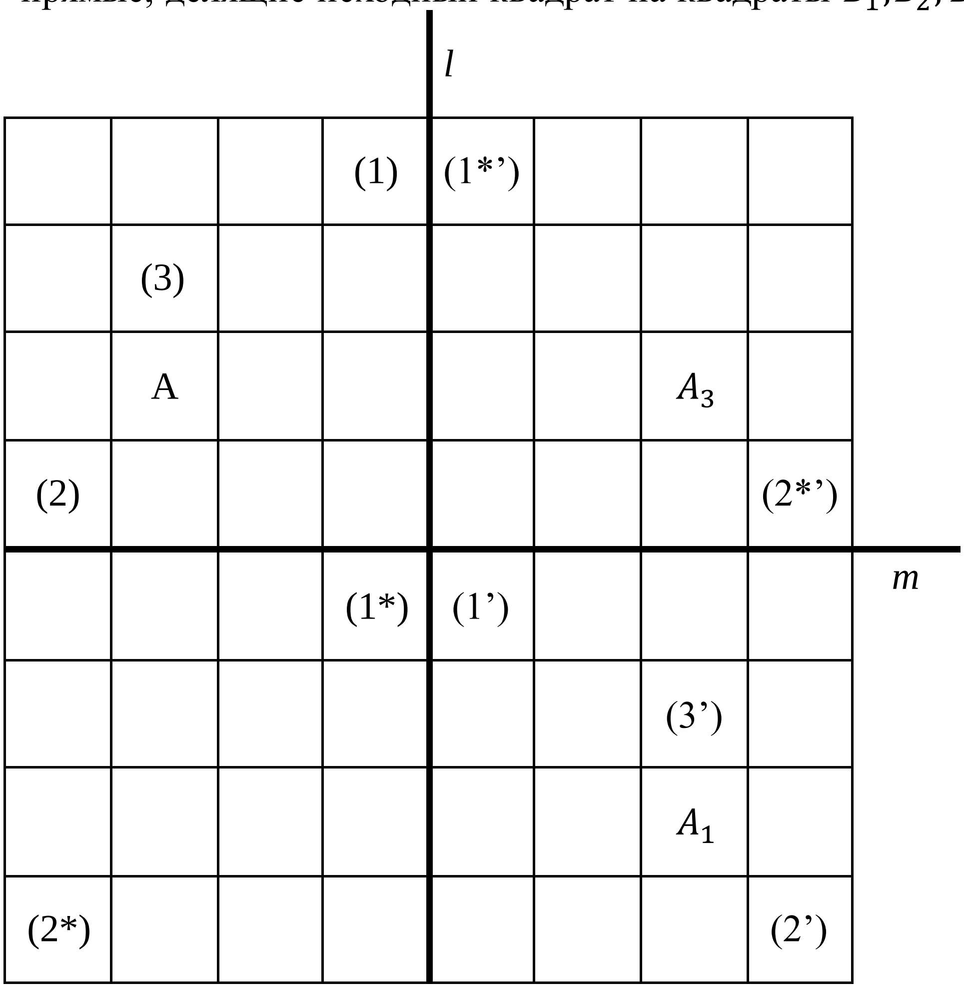
Очевидно, что все числа (цвета) в любой строке будут различны. А в столбцах происходит сдвиг цветов на 2 по модулю $n$, таким образом все цвета в столбце различны в силу нечётности $n$. Во второй диагонали происходит сдвиг цвета на 1, то есть, если в клетке с координатой $(\mathrm{x};\mathrm{y})$ стоит клетка цвета № A, то в клетке с координатой $(x-1;y-1)$ стоит клетка с цветом №$(A+1)$, по модулю $n$. Таким образом, клетки в этой диагонали пройдут все возможные остатки по модулю $n$, а значит будут раскрашены в разные цвета.

Найдем некоторые виды квадратов $n \times n$, которые можно раскрасить в $n$ цветов по-латински.

Рассмотрим квадрат $4k \times 4k$. Разделим исходный квадрат $4k \times 4k$ на 4 квадрата, пронумеруем квадраты номерами $B_1, B_2, B_3, B_4$.

| | |
|---|---|
| $B_2$ | $B_1$ |
| $B_3$ | $B_4$ |

Обозначим прямыми $l$ и $m$ соответственно вертикальную и горизонтальную прямые, делящие исходный квадрат на квадраты $B_1, B_2, B_3, B_4$.



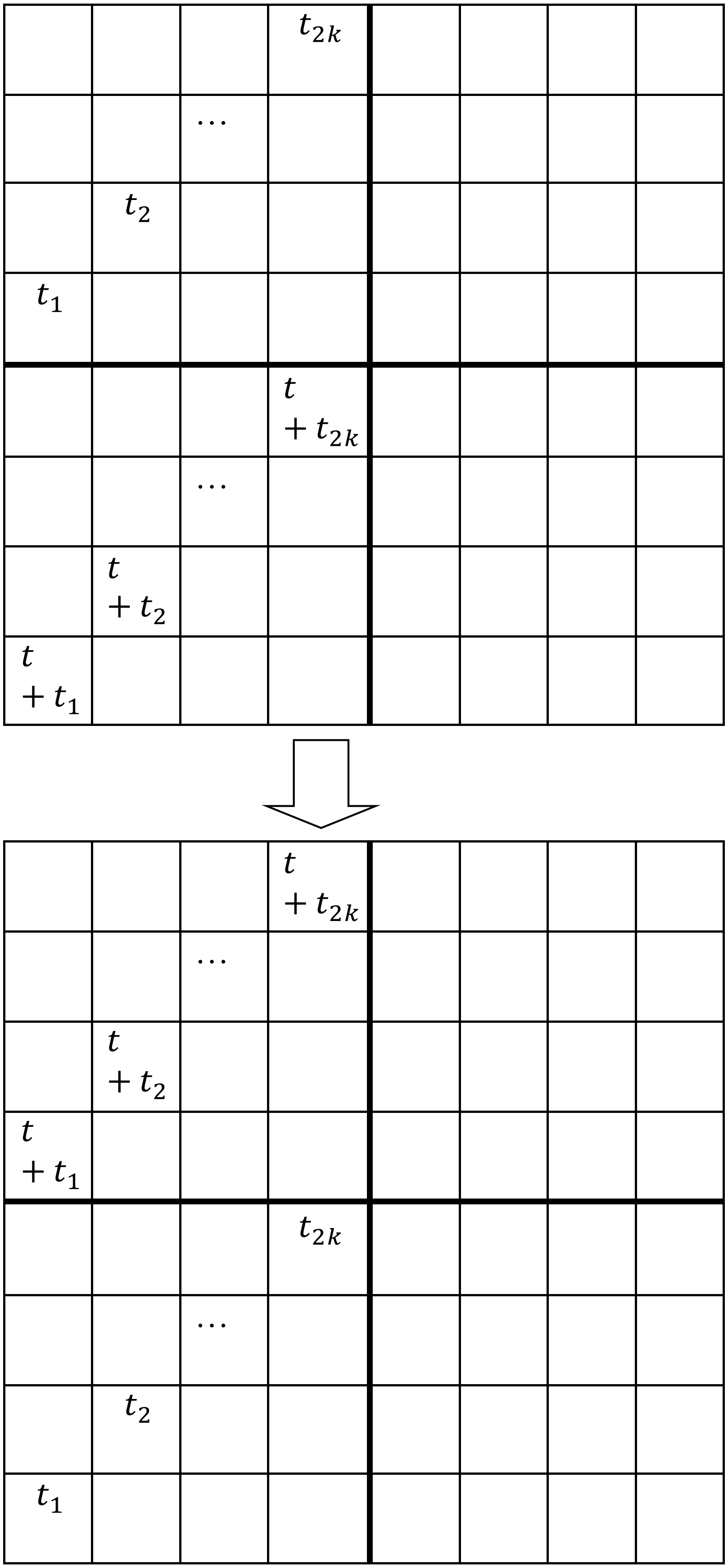

Раскрасим квадрат $B_2$ по-латински в t цветов, далее поставим в соответствие всякой клетке $A(l-x_0, m+y_0)$ из квадрата $B_2$ клетку $A_1$ из квадрата $B_4$ такую, что $A_1(l+x_0, y_0)$, далее в соответствующие клетки $A$ и $A_1'$ покрасим в 1 цвет, несложно понять, что квадрат $B_4$ также окажется раскрашенным по-латински в $t$

цветов в силу соответствующего разбиения. Таким образом, клетки (1) и (1’), (2) и (2’), (3) и (3’) будут покрашены в один и тот же цвет и так далее.

Пусть квадрат $B_2$ (и соответственно $B_4$) покрашены в цвета $1, 2, \ldots, t$. Покрасим квадрат $B_3$ в цвета $(t+1), (t+2), \ldots, (2t)$ по-латински следующим образом: клетке $\mathrm{A}(l - x_0, m + y_0)$ квадрата $B_2$ поставим в соответствие клетку $A_2$ такую, что $\mathrm{A}_2(l - x_0; y_0)$, а далее покрасим соответствующие клетки $A$ и $A_2$ в цвета, разность которых равна t, то есть если клетка (1) покрашена в цвет $t_1$, то клетку (1*) покрасим в цвет $(t + t_1)$. Если клетка (2) покрашена в цвет $t_2$, то клетка (2*) будет покрашена в цвет $(t + t_2)$ и так далее. Тогда квадрат $B_3$ будет покрашен в $t$ цветов по-латински в силу соответствия всех его клеток. Аналогично поступим и с квадратами $B_4$ и $B_1$, то есть клетку $\mathrm{A}_3$ поставим в соответствие клетке $A_2$ и покрасим соответствующие клетки в цвета с номерами с разностью t. То есть если клетка (1’) покрашена в цвет $t_1$, то клетку (1*’) покрасим в цвет $(t + t_1)$. Если клетка (2’) покрашена в цвет $t_{2\prime}$, то клетку (2*’) покрасим в цвет с номером $(t + t_{2\prime})$ и так далее. Тогда квадрат $B_1$ также будет раскрашен в t цветов по-латински.

Заметим, что при данной раскраске на главной диагонали квадрата $B_2$, проходящей через клетки (1) и (2) будут стоять числа от 1 до t, при этом всякий цвет в клетке на этой диагонали будет равен цвету, находящемуся в клетке квадрата $B_4$, соответствующей данной. Аналогично и с диагоналями квадратов $B_1$ и $B_3$.

Возьмем диагонали квадратов $B_2$ и $B_3$, проходящие через точки (2) и (1), (2*) и (1*) соответственно, и переместим соответствующие цвета в клетках местами, то есть поступим следующим образом:


$t_{2k}$
$\cdots$
$t_2$
$t_1$
$t + t_{2k}$
$\cdots$
$t + t_2$
$t + t_1$
$t + t_{2k}$
$\cdots$
$t + t_2$
$t + t_1$
$t_{2k}$
$\cdots$
$t_2$
$t_1$

Такую же самую операцию проделаем и с диагоналями квадратов $B_1$ и $B_4$, проходящими через точки (1*’) и (2*’), (1’) и (2’) соответственно для этих квадратов. То есть поступим следующим образом:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $t + t_{2k'}$ | | | |
| | | | | | $\cdots$ | | |
| | | | | | | $t + t_{2'}$ | |
| | | | | | | | $t + t_{1'}$ |
| | | | | $t_{2k'}$ | | | |
| | | | | | $\cdots$ | | |
| | | | | | | $t_{2'}$ | |
| | | | | | | | $t_{1'}$ |

$$\Downarrow$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $t_{2k'}$ | | | |
| | | | | | $\cdots$ | | |
| | | | | | | $t_{2'}$ | |
| | | | | | | | $t_{1'}$ |
| | | | | $t + t_{2k'}$ | | | |
| | | | | | $\cdots$ | | |
| | | | | | | $t + t_{2'}$ | |
| | | | | | | | $t + t_{1'}$ |

Заметим, что в силу соответствия цветов в клетках $A$ и $A_1$, можно получить, что $t_1 = t_{1'}, t_2 = t_{2'}, \dots, t_{2k} = t_{2k'}$, значит, проделав такую операцию, из исходного после преобразования получим:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $t_{2k}$ | $t + t_{2k}$ | | | |
| | | $\cdots$ | | | $\cdots$ | | |
| | $t_2$ | | | | | $t + t_2$ | |
| $t_1$ | | | | | | | $t + t_1$ |
| | | | $t + t_{2k}$ | $t_{2k}$ | | | |
| | | $\cdots$ | | | $\cdots$ | | |
| | $t + t_2$ | | | | | $t_2$ | |
| $t + t_1$ | | | | | | | $t_1$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $t + t_{2k}$ | $t_{2k}$ | | | |
| | | $\cdots$ | | | $\cdots$ | | |
| | $t + t_2$ | | | | | $t_2$ | |
| $t + t_1$ | | | | | | | $t_1$ |
| | | | $t_{2k}$ | $t + t_{2k}$ | | | |
| | | $\cdots$ | | | $\cdots$ | | |
| | $t_2$ | | | | | $t + t_2$ | |
| $t_1$ | | | | | | | $t + t_1$ |

Заметим, что изначально любой столбец квадрата $4k \times 4k$ не содержала одинаковых цветов, так как любой столбец квадрата $2k \times 2k$ не содержал два одинаковых цвета, а в двух квадратах, лежащих по одну сторону от прямой $l$ не находится ни одного повторяющегося цвета. Таким образом любой столбец большого квадрата удовлетворяет условию латинской раскраски, так как он состоит из столбцов верхнего и нижнего квадратов $2k \times 2k$. Между этими столбцами не найдется двух одинаковых цветов, и в каждом из этих столбцов не найдется клеток, покрашенных одинаковыми цветами. После смены диагоналей столбец квадрата также будет покрашен в разные цвета, так как мы лишь поменяем местами цвета в двух клетках.

Аналогичный факт можно отметить и для любой строки полученного квадрата.

Докажем, что и на диагоналях квадрата $4k \times 4k$ не найдется клеток одного цвета. На второй главной диагонали квадрата $B_2$ (отличной от диагонали, содержащей (1) и (2)) все клетки, которые она содержит, закрашены цветами с номерами, не большими t, на главной диагонали квадрата $B_4$, проходящей через (1') и (2'), после проделанной операции, будут находиться клетки, покрашенные цветами, с номерами, большими t. При этом на ней не найдется двух клеток, покрашенных в один цвет (по условию латинской раскраски). Значит главная диагональ квадрата $4k \times 4k$ не имеет клеток, покрашенных в один цвет, как не имеет повторов на половине, которая является диагональю квадрата $B_4$, а также между этими двумя половинами, то есть эта диагональ удовлетворяет условию латинской раскраски.

В силу симметрии вторая диагональ квадрата $4k \times 4k$ также будет удовлетворять условию латинской раскраски.

Значит мы получаем, что полученная раскраска квадрата $4k \times 4k$ в $2t$ цветов является латинской при условии, что можно получить раскраску по-латински в t цветов для квадрата $2k \times 2k$.

Построим пример для квадрата по полученному алгоритму из следующей раскраски по-латински квадрата $4 \times 4$ в 4 цвет:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | |
| 3 | 4 | 1 | 2 | | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 4 | 3 | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | |
| 3 | 4 | 1 | 2 | | | | |
| 4 | 3 | 2 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 4 | 3 | | | | |
| | | | | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | 2 | 1 | 4 | 3 |
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | | | 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 6 | 5 | 8 | 7 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 7 | 8 | 5 | 6 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 7 | 8 | 5 | 6 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 5 | 7 | 8 | 3 | 4 | 1 | 2 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 8 | 4 | 7 | 6 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 2 | 6 | 1 | 8 | 7 |
| 4 | 7 | 2 | 1 | 5 | 6 | 3 | 8 |
| 6 | 1 | 4 | 3 | 7 | 8 | 5 | 2 |
| 5 | 6 | 7 | 4 | 8 | 3 | 2 | 1 |
| 7 | 8 | 1 | 6 | 2 | 5 | 4 | 3 |
| 8 | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 | 7 | 4 |
| 2 | 5 | 8 | 7 | 3 | 4 | 1 | 6 |

Тогда, так как нами были получены примеры раскрасок по-латински для случаев $4 \times 4$, $6 \times 6$ в 4 и 6 цветов соответственно, заключаем, что минимальное количество цветов для раскраски по-латински квадратов $2^m$ и $2^m \cdot 3$ равно $2^m$ и $2^m \cdot 3$ соответственно для всех натуральных m.

Пример для $6 \times 6$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 5 | 3 | 6 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 6 | 5 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 1 | 6 | 3 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 6 | 4 |

Рассмотрим следующую задачу:

В какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки прямоугольника $n \times m$, чтобы любые две клетки одного цвета не были соседними (ни по стороне, ни по вершине)?

Найдём наименьшее число цветов необходимое чтобы раскрасить клетки прямоугольника $n \times m$, так чтобы любые 2 клетки одного цвета не были соседними, по стороне, ни по вершине. Рассмотрим квадрат $2 \times 2$. Все клетки квадрата являются попарно соседними, а следовательно минимальное количество цветов для раскраски равно четырём.

Пример:

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |

Так как в любом прямоугольнике $n \times m$, где $\mathrm{n} \geq 2$ и $\mathrm{m} \geq 2$ найдётся квадрат $2 \times 2$, то минимальное количество цветов для раскраски прямоугольника равно 4.

Построим пример на четыре цвета для раскраски прямоугольника $n \times m$:

$m$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | … |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | |
| ⋮ | | | | | | | | |

$n$

где в нечётных строках чередуются цвета № 1 и № 2, а в четных строках – № 3 и № 4. Следовательно, минимальное количество цветов равно 4.

Если не нарушая общности $\mathrm{n} = 1$, $\mathrm{m} \neq 1$, то рассмотрев прямоугольник $1 \times m$, получим оценку на 2 цвета.

Построим пример:

$m$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | … |

Если $\mathrm{m} = \mathrm{n} = 1$, то ответ очевиден − раскраска в один цвет.

Построим пример:

| |
|---|
| 1 |

*Замечание 1.* Отметим, что если под соседними клетками понимать только соседние по стороне клетки (без вершин), то, рассмотрев прямоугольник $1 \times 2$, получим оценку на минимальное количество – 2. Примером является тривиальная шахматная раскраска.

Найдём наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить кубики $1 \times 1 \times 1$ прямоугольного параллелепипеда $m \times n \times k$, где $\mathrm{n} \geq 2$, $\mathrm{m} \geq 2$, $\mathrm{k} \geq 2$

так, чтобы любые 2 кубика одного цвета не были соседними по вершине, ни по ребру, ни по грани.

Рассмотрим куб $2 \times 2 \times 2$. Все его клетки являются попарно соседними по вершине, а следовательно, минимальное количество цветов $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Пример:

нижний слой $(1 \times 2 \times 2)$

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 4 |

верхний слой $(1 \times 2 \times 2)$

| | |
|---|---|
| 5 | 6 |
| 7 | 8 |

Куб $2 \times 2 \times 2$ строится наложением этих слоев.

Таким образом, в любом параллелепипеде $m \times n \times k$, где n $\geq 2$ ,m $\geq 2$ ,k $\geq 2$ найдётся куб $2 \times 2 \times 2$ , а значит минимальное количество цветов для раскраски параллелепипеда равно 8.

Построим пример:

каждый нечётный слой $n \times m$ будет иметь следующий вид:

$m$

$n$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | … | |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | | | |
| 3 | 4 | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| | | | | | | |

где в нечётных строках чередуются цвета № 1 и № 2 , а в чётных № 3 и № 4.

Каждый чётный слой $n \times m$ будет иметь следующий вид:

$m$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | … | |
| | 7 | 8 | 7 | 8 | 7 | | |
| | 5 | 6 | 5 | 5 | | | |
| $n$ | 7 | 8 | | | | | |
| | ⋮ | | | | | | |
| | | | | | | | |

где в нечётных строках чередуются цвета № 5 и № 6, а в чётных – № 7 и № 8. Так как для любой клетки всё её соседи другого с ней цвета, условие пункта выполняется. Следовательно, минимальное количество цветов 8.

*Замечание 2.* Отметим, что если под соседними кубиками понимать только соседние по грани кубики (не включая вершины и рёбра), то рассмотрев параллелепипед $1 \times 1 \times 2$ , получим оценку на минимальное количество цветов – 2. Примером является тривиальная шахматная трёхмерная раскраска.

Найдём наименьшее число цветов необходимое, чтобы раскрасить $n$ −мерные кубики $1 \times 1 \times \ldots \times 1$ $n$ −мерного параллелепипеда $\mathrm{k}_1 \times \mathrm{k}_2 \times \ldots \times \mathrm{k}_\mathrm{n}$, где $\mathrm{k}_\mathrm{i} \geq 2, j = \overline{1,\mathrm{n}}$ так, чтобы никакие два кубика не были соседними.

Рассмотрим куб $2 \times 2 \times \ldots \times 2$. Все его кубики попарно соседние, а следовательно, количество цветов минимум равно $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^\mathrm{n}$.

Пример очевиден, так как все кубики разных цветов.

Для построения примера раскраски $n$ −мерного параллелепипеда применим метод математической индукции. Докажем, что существует раскраска в $2^{t+1}$ цветов $(\mathrm{t}+1)$–мерного параллелепипеда $\mathrm{k}_1 \times \ldots \times \mathrm{k}_{\mathrm{t}+1}$, $t \in \mathbb{N}$.

База индукции. Случай двухмерного пространства $(t = 1)$ был рассмотрен в пункте 7.6.

Шаг индукции. Пусть для всех $\mathrm{t} \leq \mathrm{q} - 1$ существует раскраска в $2^\mathrm{q}$ цветов $q$ −мерного параллелепипеда $\mathrm{k}_1 \times \ldots \times \mathrm{k}_\mathrm{q}$.

Докажем, что для $t = q$ такая раскраска в $2^{\mathrm{q}+1}$ цветов тоже существует.

Исходя из предположения шага индукции, существует раскраска параллелепипеда $\mathrm{k}_1 \times \ldots \times \mathrm{k}_\mathrm{q} \times 1$ в $2^\mathrm{q}$ цветов. Рассмотрим такой же параллелепипед и раскрасим его в другие $2^\mathrm{q}$ цветов.

Таким образом, мы использовали все $2^{\mathrm{q}+1}$ цветов.

Чередуя попеременно $k_{q+1}$ раз эти два $(q+1)$–мерных параллелепипеда по оси $k_{q+1}$,получаем искомый параллелепипед.

Таким образом, основываясь на базе индукции и из справедливости доказываемого утверждения для $t \leq (q-1)$, следует справедливость данного утверждения для $t = q$. На основании принципа математической индукции можно сделать вывод, что утверждение верно для любого $t$, $t \in \mathbb{N}$.

Следовательно, для $n$ −мерного параллелепипеда $k_1 \times \ldots \times k_n$ наименьшее количество цветов равно $2^n$.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе подготовки к Минскому городскому открытому турниру юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) возникла идея обобщить задачу «Красим по-латински». Получены следующие результаты:

1) Исследована представленная раскраска, найдены все нечетные числа $n$, для которых нельзя раскрасить квадрат $n \times n$ по-латински с помощью указанного алгоритма. Доказано, что данная раскраска не является латинской для четных или кратных трем $n$.

2) Предложен алгоритм раскраски по-латински для квадратов со сторонами $2^m$ и $2^m \cdot 3$ в $2^m$ и $2^m \cdot 3$ цветов соответственно.

3) Доказано, что для прямоугольника $n \times m$ минимальное число цветов для раскраски клеток, чтобы любые две клетки не были соседними, равно четырем. Отдельно рассмотрены исключения, где возможны два цвета ($n = 1,\ m \neq 1$) или один цвет ($n = m = 1$).

4) Доказано, что для прямоугольного параллелепипеда $m \times n \times k$ минимальное количество цветов для раскраски кубиков, чтобы любые два кубика не были соседними, равно 8.

5) Доказано, что для $n$-мерного параллелепипеда минимальное количество цветов для раскраски $n$-мерного кубиков, чтобы любые два кубика не были соседними, равно $2^n$. Для построения примера данной конструкции использовался метод математической индукции.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Исследовательские задания VII Минского городского открытого турнира юных математиков (младшая лига – 5-7 классы). – Режим доступа: http://www.uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html – Дата доступа: 10.03.2020.