Отдел по образованию Ляховичского районного исполнительного комитета
Государственное учреждение образования «Островская средняя школа»
Ляховичского района

Секция: алгебра, геометрия и математический анализ

Признаки равенства треугольников по заданным высотам, медианам, биссектрисам

Исполнитель: Лешик Милена ,
9 класс
Руководитель: Котова Татьяна Алексеевна,
учитель математики

Остров 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Треугольник – одна из самых простых геометрических фигур. В нем выделяют шесть основных элементов: три стороны и три угла. Равенство треугольников устанавливают по равенству трех из шести элементов. На уроках геометрии в школе мы изучили три признака равенства треугольников.

1-й признак: по двум сторонам и углу между ними;

2-й признак: по стороне и двум прилежащим к ней углам;

3-й признак: по трем сторонам.[1, с.56 -57]

В некоторых математических справочниках указан четвертый признак: по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них.[2, с. 27]

Если учесть, что для каждого треугольника однозначно определяются три медианы, три высоты, и три биссектрисы, углы между ними и сторонами треугольника, то возникает следующая гипотеза: можно сформулировать и доказать признаки равенства треугольников, используя понятия медиан, высот, биссектрис.

Цель исследования: сформулировать и доказать признаки равенства треугольников по трем медианам, трем высотам, трем биссектрисам.

Задачи исследования:

1) изучить литературу по исследуемой теме;
2) рассчитать количество возможных признаков равенства треугольников;
3) вывести формулу связи длины медианы и сторон треугольника;
4) вывести формулу связи длины биссектрисы треугольника со значением угла, в котором она проведена, и длинами сторон, образующих этот угол;
5) вывести формулу связи длины биссектрисы с длинами сторон треугольника;
6) доказать однозначность и единственность существования треугольника по трем медианам, трем высотам;
7) при помощи циркуля и линейки построить треугольник по заданным трем высотам и трем медианам;
8) доказать признак равенства треугольников по трем биссектрисам.

Предмет исследования**:** равенство треугольников .

Объект исследования: признаки равенства треугольников по трем медианам, высотам, биссектрисам.

Методы исследования: теоретический (изучение, анализ, синтез теоретического материала), системно-поисковый, практический (доказательство и построение).

ГЛАВА 1. РАСЧЕТ ТЕОРЕТИЧЕСКИ ВОЗМОЖНОГО ЧИСЛА ПРИЗНАКОВ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В школьном курсе геометрии равенство треугольников определяется по трем признакам:

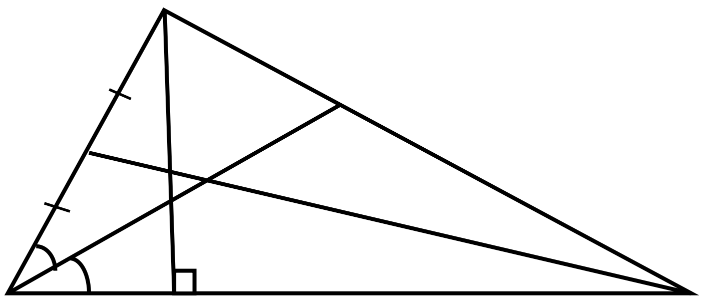
1-й признак: по двум сторонам и углу между ними;

2-й признак: по стороне и двум прилежащим к ней углам;

3-й признак: по трем сторонам.

Если учесть, что для каждого треугольника, кроме сторон и углов, однозначно определяются три медианы, три высоты, и три биссектрисы, углы между ними и сторонами треугольника, то можно посчитать теоретически возможное число признаков равенства треугольников. [3, с.58 -60]

Итак, рассмотрим сколько элементов можно насчитать.



Стороны – 3, углы - 3, медианы – 3, биссектрисы – 3, высоты – 3, углы между медианой и сторонами, выходящими из одной вершины – 6, углы между медианой и стороной, которую медиана делит пополам – 6, углы между биссектрисой и сторонами, выходящими из одной вершины – 3, углы между биссектрисой и противолежащей стороной – 6, углы между высотой и сторонами, выходящими из одной вершины – 6.

Всего 42 элемента. Используем формулу $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$,[4, с.63]

$$C_{42}^3 = \frac{42!}{(42-3)!3!} = 11480.$$

Теоретически возможное число признаков равенства треугольников 11480. Из них мы рассмотрим только три: по трем медианам, трем высотам, трем биссектрисам.

ГЛАВА 2. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ТРЕМ ЗАДАННЫМ ВЫСОТАМ, МЕДИАНАМ, БИССЕКТРИСАМ

Первый признак равенства треугольников говорит: «Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны». По-другому можно сказать, что любой треугольник однозначно определяется своими сторонами, если они удовлетворяют неравенству треугольника. Мы можем построить треугольник, если он существует, по трем заданным сторонам при помощи циркуля и линейки.

Что получится, если вместо сторон оперировать такими понятиями как медианы, высоты и биссектрисы треугольника?

Итак, нас интересует:

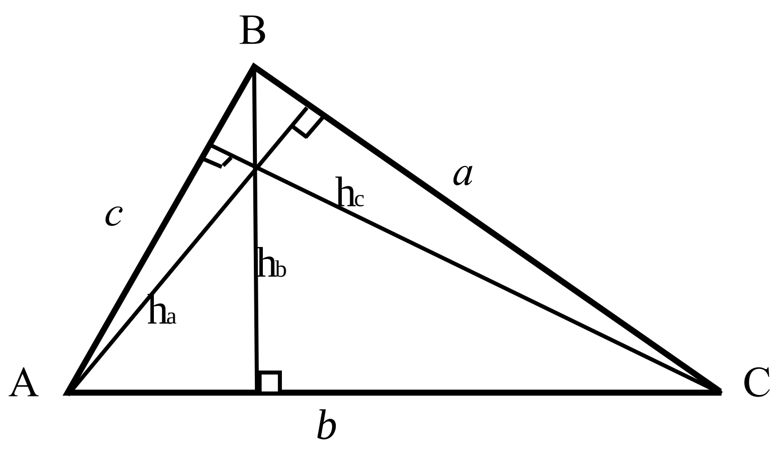
1) Определяется ли треугольник заданными элементами, то есть существует ли хотя бы одно решение рассматриваемой задачи?
2) Если решение существует, то единственное ли оно (однозначно ли определяется треугольник)?

Ответы на эти вопросы попытаемся получить, решая задачу на построение треугольника по трем заданным элементам.

2.1. Признак равенства треугольников по трем заданным высотам

Пусть заданы отрезки h_a, h_b , h_c . Необходимо построить треугольник ABC, высоты которого, проведенные из вершин A, B, и C, соответственно равны h_a, h_b , h_c.

Анализ. Обозначим a ,$в$, c – длины сторон искомого треугольника, противолежащих углам A,B, и C, а h_a, h_b , h_c – высоты, опущенные на соответствующие стороны, S – площадь треугольника ABC.



$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$.

Можно записать $ah_a = bh_b = ch_c$.

Из равенства $ah_a = bh_b$, получаем $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}$,

Из равенства $bh_b = ch_c$, получаем $b = \frac{h_c c}{h_b}$, поэтому $\frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a\, h_b}{h_c}}$.

Таким образом, $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a\, h_b}{h_c}} = k$, обозначим $p = \frac{h_a\, h_b}{h_c}$.

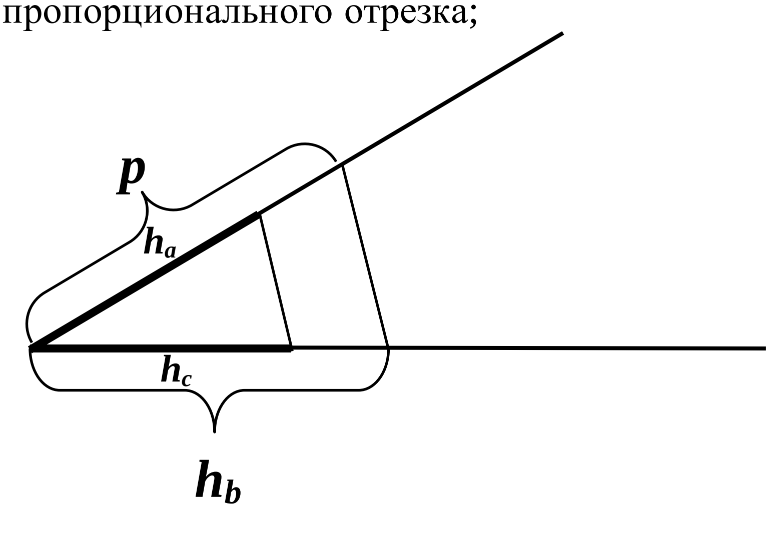
Полученные равенства показывают, что искомый треугольник со сторонами

а ,в, с подобен треугольнику со сторонами h_b, h_a, $\frac{h_a\, h_b}{h_c}$.

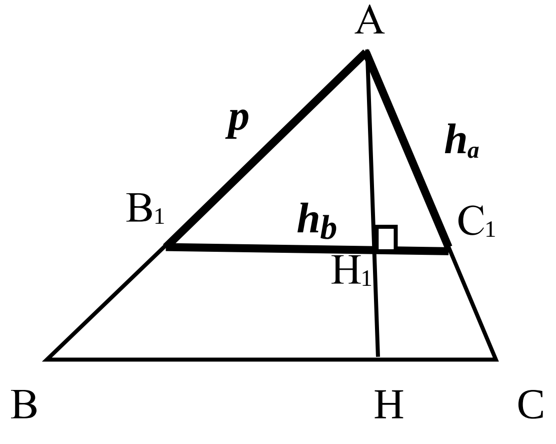
Это ключ к решению.

Построение.

1. Построим отрезок $p = \frac{h_a\, h_b}{h_c}$, используя построение четвертого пропорционального отрезка;



2. Построим треугольник AB_1C_1 по трем заданным сторонам $AB_1 = p$, $B_1C_1 = h_b$, $C_1A = h_a$, $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ (искомому);



3. $AH_1 \perp B_1C_1$;
4. AH; $AH \subset AH_1$, $AH = h_a$;
5. $BC \parallel B_1C$;
6. $BC \cap AB_1 = B$, $BC \cap AC_1 = C$;
7. Δ ABC – искомый.

Доказательство.

Построенный Δ ABC $\sim$ Δ AB_1C_1, следовательно, треугольник ABC подобен искомому треугольнику. Высота AH в треугольнике ABC равна h_a, как и должна быть в искомом треугольнике, то есть соответствующие высоты в треугольнике ABC и искомом треугольнике равны, значит, коэффициент подобия этих треугольников равен 1. Следовательно, Δ ABC – искомый.

Исследование.

Искомый треугольник ABC можно построить в том и только том случае, когда можно построить треугольник AB_1C_1, стороны которого равны h_a, h_b, $p = \frac{h_a\ h_b}{h_c}$. Но треугольник с такими сторонами можно построить только тогда, когда выполняется неравенство треугольника, то есть каждый из отрезков h_b, h_a, p меньше суммы двух других отрезков, то есть

$$p < h_b + h_a; \quad h_b < p + h_a; \quad h_a < p + h_b$$

или

$$\frac{h_a\ h_b}{h_c} < h_b + h_a; \ \ h_b < \frac{h_a\ h_b}{h_c} + h_a; \ \ h_a < \frac{h_a\ h_b}{h_c} + h_b$$

или

$$h_a\ h_b < h_b h_c + h_a h_c \ \ (1),$$

$$h_b h_c < h_a\ h_b + h_a h_c \ \ (2),$$

$$h_a h_c < h_b h_c + h_a\ h_b \ \ (3).$$

Поделим неравенства (1),(2),(3) на произведение $h_a\ h_b h_c$, получим

$$\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} \ (4),$$

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} \ (5),$$

$$\frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} \ (6)$$

Неравенства (4), (5), (6) являются условиями существования треугольника по трем заданным высотам.

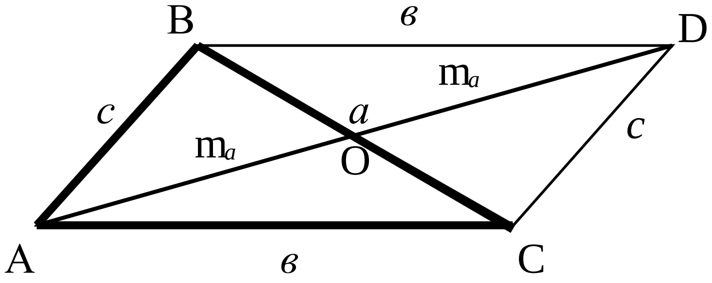
Таким образом, треугольник, заданный тремя высотами существует, если выполняются неравенства (4), (5), (6).

А это значит, что можно сформулировать признак равенства треугольников по трем заданным высотам: если три высоты одного треугольника соответственно равны трем высотам другого треугольника, то эти треугольники равны, при этом длины высот должны удовлетворять неравенствам (4), (5), (6).

2.2. Признак равенства треугольников по трем заданным медианам

2.2.1. Вывод формулы связи длины медианы и сторон треугольника

Пусть задан треугольник ABC, *a* ,, *c* – длины сторон этого треугольника, m_a = AO - медиана, проведенная из вершины A.



Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABCD, для этого проведем BD ∥ AC, AB ∥ CD. BC = *a*, AD = $2m_a$ являются диагоналями этого параллелограмма, которые точкой O делятся пополам. Используя формулу связи длины сторон параллелограмма и его диагоналей, имеем

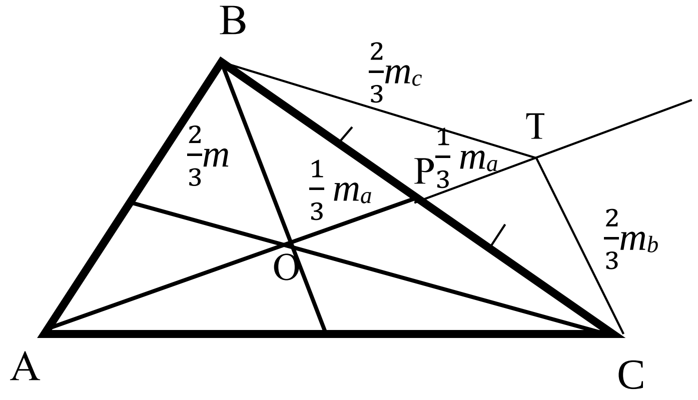
$$c^2 + b^2 + c^2 + b^2 = (2m_a)^2 + a^2,$$

$$(2m_a)^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2,$$

$4m_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$ (7), аналогично
$4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$ (8),
$4m_c^2 = 2b^2 + 2a^2 - c^2$ (9)

2.2.2. Построение треугольника по трем заданным медианам

Пусть заданы отрезки m_a , m_b , m_c. Необходимо построить треугольник АВС, медианы которого, проведенные из вершин А, В, и С, соответственно равны m_a , m_b , m_c.



Анализ. Обозначим a ,$в$, c – длины сторон искомого треугольника, противолежащих углам А,В, и С, а m_a , m_b , m_c – медианы, проведенные на соответствующие стороны, причем, m_a = АР , m_b = ВК , m_c = МС, все медианы пересекаются в точке О и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, значит, ОР = $\frac{1}{3}m_a$, ВО = $\frac{2}{3}m_b$, ОС = $\frac{2}{3}m_c$.

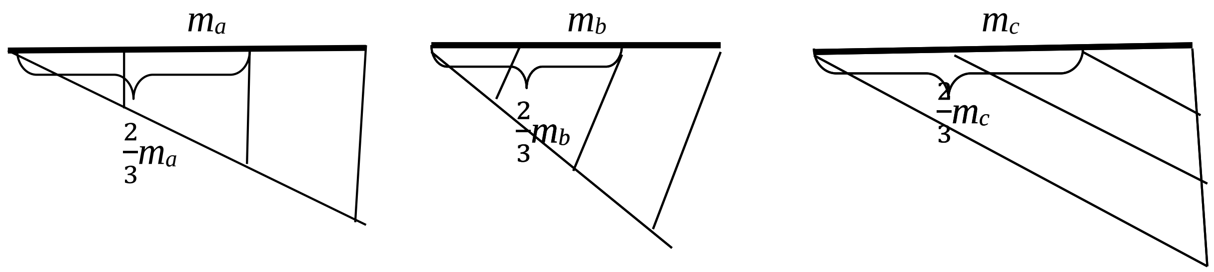
Если продлить медиану АР за точку Р и отложить отрезок РТ= ОР = $\frac{1}{3}$ m_a , тогда полученный отрезок ОТ= РТ+ОР = $\frac{2}{3}$ m_a .

Если провести ВТ ∥ ОС, ТС ∥ ВО, то полученный четырехугольник ВТСО будет параллелограммом, у которого ВТ= ОС= $\frac{2}{3}$ m_c , ТС= ВО = $\frac{2}{3}$ m_b

Мы видим, что треугольник ОВТ, со сторонами ВО = , ОТ= $\frac{2}{3}$ m_a , ВТ= $\frac{2}{3}$ m_c можно построить, при помощи циркуля и линейки, по трем заданным сторонам. Таким же образом можно построить точку С.

Построение.

1. С помощью теоремы Фалеса поделим отрезки, равные медианам, на три части;



Проведем произвольную прямую, отложим на ней отрезок $AP = m_a$;

2. АО; $AO = \frac{2}{3}m_a$;

3. Находим вершину В. Для этого строим треугольник ОВТ, со сторонами $BO = \frac{2}{3}m_b$, $OT = \frac{2}{3}m_a$, $BT = \frac{2}{3}m_c$ при помощи циркуля и линейки;

4. Находим вершину С. Для этого строим треугольник ОТС, со сторонами $OC = \frac{2}{3}m_b$, $OT = \frac{2}{3}m_a$, $TC = \frac{2}{3}m_c$ при помощи циркуля и линейки;

5. Δ АВС – искомый.

Доказательство.

В построенном треугольнике АВС отрезки АР = m_a , ВК = m_b , СМ = m_c являются медианами, как и требуется в искомом треугольнике, значит АВС – искомый.

Исследование.

Искомый треугольник АВС можно построить в том и только том случае, когда можно построить треугольник ОВТ, стороны которого равны $\frac{2}{3}$ m_b , $\frac{2}{3}$ m_a, $\frac{2}{3}$ m_c . Но треугольник с такими сторонами можно построить только тогда, когда выполняется неравенство треугольника, то есть каждый из отрезков меньше суммы двух других отрезков, то есть

$$\frac{2}{3}\ m_b < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c; \quad \frac{2}{3}m_a < \frac{2}{3}\ m_b\ + \frac{2}{3}m_c; \quad \frac{2}{3}m_c < \frac{2}{3}\ m_b + \frac{2}{3}m_a$$

или

$m_b < m_a + m_c$; (10)
$m_a < m_b + m_c$; (11)
$m_c < m_b + m_a$. (12)

Неравенства (10), (11), (12) являются условиями существования треугольника по трем заданным медианам.

Таким образом, треугольник, заданный тремя медианами существует, если выполняются неравенства (10), (11), (12).

Для исследования вопроса об однозначности построения треугольника по трем заданным медианам удобно пользоваться формулами связи длины медианы со сторонами (7), (8),(9).

$4m_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$ (7),
$4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$ (8),
$4m_c^2 = 2b^2 + 2a^2 - c^2$ (9)

(7)+(8) $4m_a^2 + 4m_b^2 = 4c^2 + a^2 + b^2$,
(7)+(9) $4m_a^2 + 4m_c^2 = 4b^2 + 2a^2 + c^2$,
(8)+ (9) $4m_b^2 + 4m_a^2 = 4a^2 + b^2 + c^2$

Из (9) получим $2b^2 + 2a^2 = 4m_c^2 + c^2$,

$$b^2 + a^2 = \frac{4m_c^2 + c^2}{2},$$

подставим это выражение в формулу (7)+(8)

$4m_a^2 + 4m_b^2 = 4c^2 + \frac{4m_c^2 + c^2}{2}$;

$8m_a^2 + 8m_b^2 = 8c^2 + 4m_c^2 + c^2$,

$8m_a^2 + 8m_b^2 - 4m_c^2 = 9c^2$,

$9c^2 = 4\,(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2)$,

$c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$, аналогично получаем

$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_c^2 + 2m_b^2 - m_a^2}$,

$b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2}$.

Если заданные медианы удовлетворяют неравенству треугольника (10),(11),(12), то все подкоренные выражения положительные, а это значит , что решение всегда существует.

Можно сформулировать признак равенства треугольников по трем заданным медианам: если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то эти треугольники равны, при этом длины медиан должны удовлетворять неравенствам (10), (11), (12).

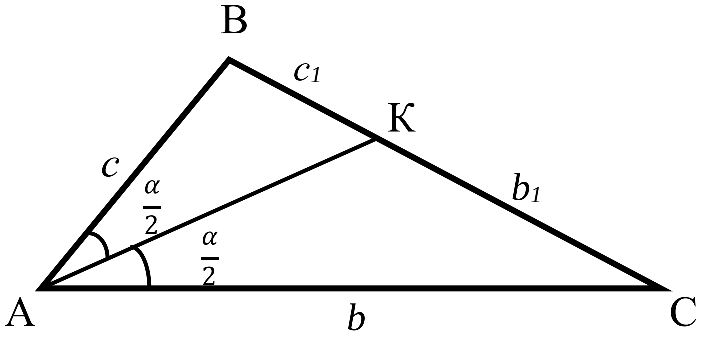
2.3. Признак равенства треугольников по трем заданным биссектрисам

Треугольник с некоторыми заданными положительными длинами трех биссектрис существует всегда, никаких ограничений на эти числа накладывать не надо. Румынские математики Петру Миронеску и Лаурентин Панаитопол в 1994 году привели доказательство этого, основанное на теореме Брауэра о неподвижной точке.[5, с.50]

В процессе подготовки исследовательской работы, мы узнали, что построить треугольник по трем его биссектрисам, при помощи циркуля и линейки невозможно. Это в 1896 году доказал математик П.Барбарин.[5,с.51] Поэтому, для доказательства признака равенства треугольников по трем биссектрисам, мы используем другой подход.

2.3.1. Вывод формулы связи длины биссектрисы со значением угла, в котором она проведена, и длинами сторон, образующих этот угол

Пусть задан треугольник ABC. Обозначим стороны AB = c, AC = b, отрезки BK = c_1, CK = b_1, l - биссектриса угла A, $\angle$ A = α.



Рассмотрим треугольник АВК, по теореме косинусов

$c_1^2 = c^2 + l^2 - 2cl\cos\frac{\alpha}{2}$ (13).

Рассмотрим треугольник АСК, по теореме косинусов

$b_1^2 = b^2 + l^2 - 2bl\,cos\frac{\alpha}{2}$ (14).

По свойству биссектрисы угла треугольника

$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}$ (15). Возведем (15) в квадрат, подставим формулы (13) и (14), получим $\frac{c^2}{c^2 + l^2 - 2cl\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2}{b_1^2 = b^2 + l^2 - 2bl\cos\frac{\alpha}{2}}$,

$$b^2c^2 + c^2 l^2 - 2bl c^2 \cos\frac{\alpha}{2} = b^2c^2 + b^2 l^2 - 2cl\, b^2\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$2clb^2\cos\frac{\alpha}{2} - 2bl c^2 \cos\frac{\alpha}{2} = b^2 l^2 - c^2 l^2,$$

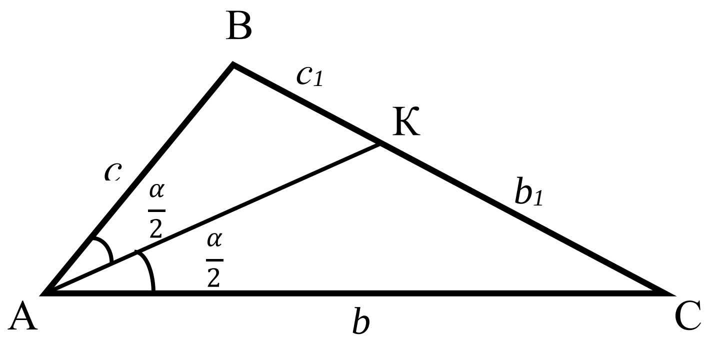
$$2cbl\cos\frac{\alpha}{2}(b - c) = l^2(b^2 - c^2), \quad l = \frac{2cb\cos\frac{\alpha}{2}(b-c)}{(b^2 - c^2)},$$

$$l = \frac{2cb\cos\frac{\alpha}{2}}{b + c} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{b}} \quad (16).$$

Получили формулу связи длины биссектрисы со значением угла, в котором она проведена, и длинами сторон, образующих этот угол.

2.3.2. Вывод формулы связи длины биссектрисы с длинами сторон треугольника

Пусть задан треугольник АВС. Обозначим стороны АВ = *c*, АС =*b*, ВС = a, отрезки ВК = c_1, СК = b_1, l - биссектриса угла А, ∠ А = α.



Рассмотрим треугольник АВК, по теореме косинусов

$c_1^2 = c^2 + l^2 - 2cl\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{c^2 + l^2 - c_1^2}{2cl}$ (17).

Рассмотрим треугольник АСК, по теореме косинусов

$b_1^2 = b^2 + l^2 - 2bl\,cos\frac{\alpha}{2}$,

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b^2 + l^2 - b_1^2}{2bl}$ (18). Так как (17) = (18), то

$\frac{c^2 + l^2 - c_1^2}{c} = \frac{b^2 + l^2 - b_1^2}{b}$, $bc^2 + b\,l^2$ - $bc_1^2 = b^2c + c\,l^2$ - $b_1^2 c$ (19).

По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}$, учитывая, что $c_1 = a - b_1$, $b_1 = a - c_1$, получаем $c_1 = \frac{ac}{b+c}$, $b_1 = \frac{ab}{b+c}$, подставим эти выражения в формулу (19).

$$b\,l^2 - c\,l^2 = b^2c - bc^2 - \frac{a^2b^2c}{(c+b)^2} + \frac{a^2c^2b}{(c+b)^2},$$

$$l^2 = bc\,(1 - \frac{a^2}{(c+b)^2}), \qquad l = \sqrt{bc\,(1 - \frac{a^2}{(c+b)^2})} \quad (20).$$

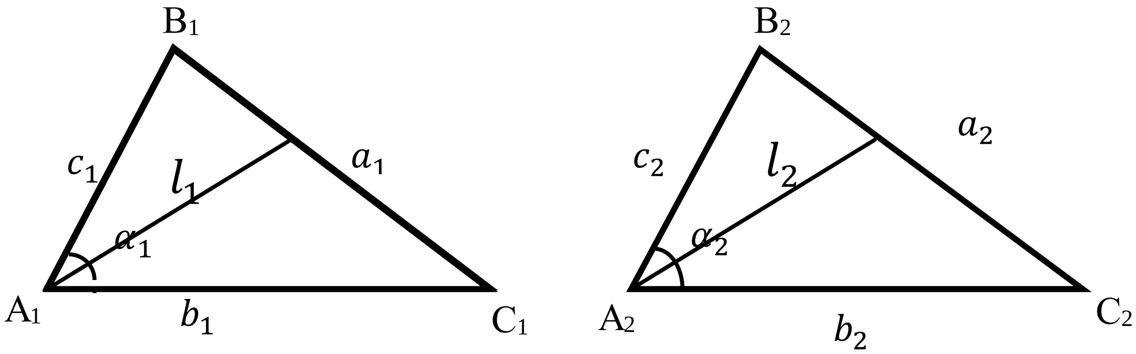
Получили формулу связи длины биссектрисы с длинами сторон треугольника.

2.3.3. Доказательство признака равенства треугольников по трем заданным биссектрисам

Докажем следующий признак равенства треугольников: если три биссектрисы одного треугольника соответственно равны трем биссектрисам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.

Рассмотрим два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, которые имеют равные биссектрисы.



Назовем соответствующими стороны, к которым проведены равные биссектрисы. Для доказательства признака равенства треугольников по трем заданным биссектрисам рассмотрим 4 случая:

1 случай. Все стороны одного треугольника равны соответствующим сторонам другого треугольника, тогда эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

2 случай. Предположим, что у треугольников есть неравные соответствующие стороны, но соответствующие углы равны. В этом случае треугольники подобны. Но так, как их биссектрисы равны, то коэффициент подобия должен быть равен 1. А это значит, треугольники равны.

3 случай. У треугольников есть неравные соответствующие стороны и неравные углы. Предположим, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ больше сторон треугольника $A_2B_2C_2$. В треугольнике $A_1B_1C_1$ найдется угол α_1, меньший соответствующего угла α_2 в треугольнике $A_2B_2C_2$.Если угол α_1 в

треугольнике $A_1B_1C_1$ образован сторонами b_1 и c_1,а угол α_2 в треугольнике $A_2B_2C_2$ сторонами b_2 и c_2, то для биссектрис l_1и l_2 этих углов имеем, согласно формуле (16):

$$l_1 = \frac{2\cos\frac{\alpha_1}{2}}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{b_1}} \qquad \text{и} \qquad l_2 = \frac{2\cos\frac{\alpha_2}{2}}{\frac{1}{c_2}+\frac{1}{b_2}} \quad .$$

Сравним величины l_1 и l_2.

Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то $\cos\frac{\alpha_1}{2} > \cos\frac{\alpha_2}{2}$, если $b_1 > b_2$, то $\frac{1}{b_1} < \frac{1}{b_2}$, если $c_1 > c_2$, то $\frac{1}{c_1} < \frac{1}{c_2}$, значит $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{b_1} < \frac{1}{c_2} + \frac{1}{b_2}$, то есть $\frac{2\cos\frac{\alpha_1}{2}}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{b_1}} > \frac{2\cos\frac{\alpha_2}{2}}{\frac{1}{c_2}+\frac{1}{b_2}}$.

Следовательно, $l_1 > l_2$, получили противоречие.

Итак, в рассматриваемом случае треугольники могут иметь только равные соответствующие стороны.

4 случай. Предположим одна из сторон треугольника меньше соответствующей стороны другого треугольника, а две другие не меньше соответствующих сторон другого треугольника.

Допустим $a_1 < a_2$, $b_1 \geq b_2$, $c_1 \geq c_2$. Воспользуемся формулой связи длины биссектрисы с длинами сторон треугольника (20). Запишем длины биссектрис, опущенных соответственно на стороны a_1и a_2:

$$l_1 = \sqrt{b_1 c_1 \left(1 - \frac{a_1^2}{(c_1+b_1)^2}\right)}, \quad l_2 = \sqrt{b_2 c_2 \left(1 - \frac{a_2^2}{(c_2+b_2)^2}\right)}.$$

Сравним: $b_1 c_1 \geq b_2 c_2$, $\quad \frac{a_1^2}{(c_1+b_1)^2} < \frac{a_2^2}{(c_2+b_2)^2}$,

$$1 - \frac{a_1^2}{(c_1+b_1)^2} > \left(1 - \frac{a_2^2}{(c_2+b_2)^2}\right),$$

$$b_1 c_1 \left(1 - \frac{a_1^2}{(c_1+b_1)^2}\right) > b_2 c_2 \left(1 - \frac{a_2^2}{(c_2+b_2)^2}\right),$$

$$\sqrt{b_1 c_1 \left(1 - \frac{a_1^2}{(c_1+b_1)^2}\right)} > \sqrt{b_2 c_2 \left(1 - \frac{a_2^2}{(c_2+b_2)^2}\right)}.$$

Следовательно, $l_1 > l_2$, получили противоречие с условием.

Таким образом, в четырех случаях возможен только один вариант, когда соответствующие стороны равны. Признак равенства треугольников по трем биссектрисам доказан.

Значит, если три биссектрисы одного треугольника соответственно равны трем биссектрисам другого треугольника, то такие треугольники равны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Существует большое количество теоретически возможных признаков равенства треугольников. В работе мы сформулировали и доказали признаки равенства треугольников по трем заданным высотам, медианам и биссектрисам.

В ходе доказательства вывели формулу связи длины медианы и сторон треугольника; получили зависимость длины биссектрисы треугольника от значения угла, в котором она проведена, и длин сторон, образующих этот угол; вывели зависимость длины биссектрисы от длин сторон треугольника.

Доказательство признаков равенства треугольников по трем заданным высотам и трем медианам построено на доказательстве однозначности и единственности существования треугольника по этим элементам и возможности построения таких треугольников при помощи циркуля и линейки.

В результате проведенных исследований, мы установили условия существования треугольников, заданных тремя элементами:

1. Треугольник, заданный тремя высотами существует, если выполняются неравенства

$$\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b},$$

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b},$$

$$\frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a}.$$

С учетом этого был сформулирован и доказан признак равенства треугольников по трем заданным высотам: если три высоты одного треугольника равны трем высотам другого треугольника, то эти треугольники равны, при этом длины высот должны удовлетворять полученным неравенствам.

2. Треугольник, заданный тремя медианами существует, если выполняются неравенства

$m_b < m_a + m_c$;

$m_a < m_b + m_c$;

$m_c < m_b + m_a$.

С учетом этого был сформулирован и доказан признак равенства треугольников по трем заданным медианам: если три медианы одного треугольника равны трем медианам другого треугольника, то эти треугольники равны, при этом длины медиан должны удовлетворять неравенствам треугольника.

3. Треугольник, заданный тремя биссектрисами существует всегда, но построить его по заданным биссектрисам, при помощи циркуля и линейки невозможно. Это в 1896 году доказал математик П.Барбарин.[5,с.51] Поэтому, для доказательства признака равенства треугольников по трем биссектрисам, использовался другой подход. Рассматривались четыре возможных случая

соотношений между соответствующими сторонами и углами треугольника, использовался метод «от противного».

Признак равенства треугольников по трем заданным биссектрисам: если три биссектрисы одного треугольника равны трем биссектрисам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Практическая значимость нашей работы состоит в том, что мы получили дополнительные способы доказательства равенства треугольников, что важно при решении геометрических и практических задач. Также мы разработали серию геометрических задач на применение признаков равенства треугольников по трем медианам, высотам, биссектрисам, которые можно использовать на дополнительных занятиях по математике, при подготовке к экзаменам и ЦТ (приложение 1).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Казаков, В.В. Геометрия. 7 класс: учебное пособие/ В.В. Казаков. - Минск: Народная асвета, 2017 - 172 с.
2. Гусев, В.А. Математика: справочные материалы/ В.А. Гусев, А.Г. Мордюкович. – Москва: Просвещение, 1988. – 96 с.
3. . Из трех разных вершин…/ И.Ф.Акулич //Фокус. – 2010. - № 4. – С.58 – 60.
4. Ананченко К.О., Корнеева И.А. Алгебра учит рассуждать. 8 класс Пособие для учащихся / К.О. Ананченко, И.А.Корнеева — Минск: Аверсэв, 2012. — 156 с.
5. Акулич, И.Ф. Однозначно!/ И.Ф.Акулич // Но ближе, и ближе, и ближе…: учеб.пособие/ И.Ф.Акулич – Минск: Нац. ин-т образования, 2008 – С.48 – 51.

Серия задач по теме «Признаки равенства треугольников по заданным высотам, медианам, биссектрисам»

1. Существует ли треугольник, высоты которого равны 6, 12, 10 сантиметров?

Решение. Если h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на соответствующие стороны, то треугольник, заданный тремя высотами существует, если выполняются неравенства

$$\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b},$$

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b},$$

$$\frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a}.$$

Пусть $h_a = 6$ см, $h_b = 12$ см, $h_c = 10$ см. Проверим справедливость неравенств.

$\frac{1}{10} < \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \ \frac{1}{10} < \frac{1}{4}$ - неравенство верно,

$\frac{1}{6} < \frac{1}{10} + \frac{1}{12}, \ \frac{1}{6} < \frac{11}{60}$ - неравенство верно,

$\frac{1}{12} < \frac{1}{10} + \frac{1}{6}, \frac{1}{12} < \frac{4}{15}$ - неравенство верно.

Таким образом, треугольник, высоты которого равны 6, 12, 10 сантиметров существует.

Ответ: существует.

2. Существует ли треугольник, медианы которого равны 6, 5, 7 сантиметров?

Решение. Если m_a, m_b, m_c – медианы, проведенные на соответствующие стороны, то треугольник, заданный тремя медианами существует, если выполняются неравенства

$m_b < m_a + m_c$,
$m_a < m_b + m_c$,
$m_c < m_b + m_a$.

Пусть m_a = 6 см, m_b = 5 см , m_c = 7 см. Проверим справедливость неравенств.

$5 < 6 + 7$, $5 < 13$ - неравенство верно,

$6 < 5 + 7$, $6 < 12$ - неравенство верно,

$7 < 5 + 6$, $7 < 11$ - неравенство верно.

Таким образом, треугольник, медианы которого равны 6, 5, 7 сантиметров существует.

Ответ: существует.

3. Доказать, что треугольник ABC со сторонами 3, 4, 6 равен треугольнику $A_1B_1C_1$ с медианами $\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{95}}{2}, \frac{\sqrt{74}}{2}$.

<u>Решение.</u> Вычислим длины медиан треугольника ABC по формулам

$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$,
$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$,
$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

Получим , что $m_c = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $m_a = \frac{\sqrt{95}}{2}$, $m_b = \frac{\sqrt{74}}{2}$. Таким образом медианы треугольника ABC равны медианам треугольника $A_1B_1C_1$, значит треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$, по признаку равенства треугольников по трем медианам, что и требовалось доказать.

4. Существует ли треугольник, высоты которого равны 4, 2, 8 сантиметров?

<u>Решение.</u> Если h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на соответствующие стороны, то треугольник, заданный тремя высотами существует, если выполняются данные неравенства

$\frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c}$,

$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b},$

$\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a},$

Пусть $h_a = 8$ *см*, $h_b = 2$ *см*, $h_c = 4$ *см*. Проверим справедливость неравенств.

$\frac{1}{8} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8} < \frac{6}{8}$ - неравенство верно,

$\frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \quad \frac{4}{8} > \frac{1}{8}$ - неравенство неверно,

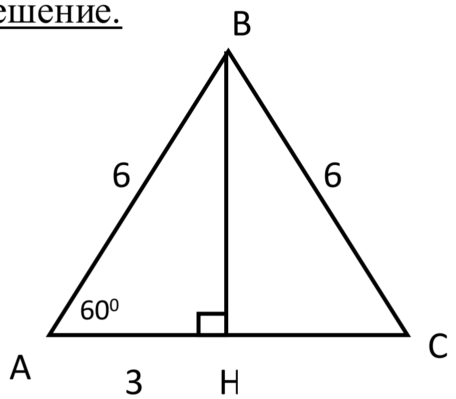
$\frac{1}{4} < \frac{1}{8} + \frac{1}{2}, \frac{2}{8} < \frac{5}{8}$ - неравенство верно.

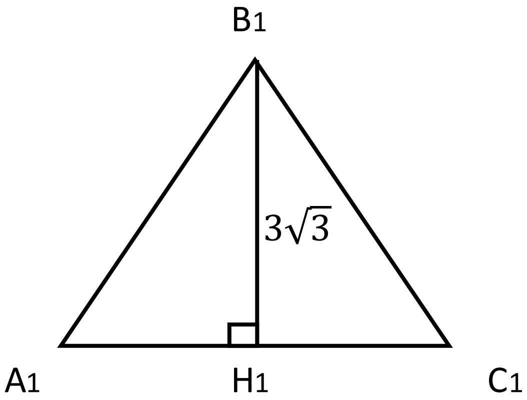
Таким образом, треугольник, высоты которого равны 4, 2, 8 сантиметров не существует.

Ответ: не существует.

5. Доказать, что правильный треугольник ABC со стороной 6 сантиметров, равен треугольнику $A_1B_1C_1$ с высотами $3\sqrt{3}$ сантиметров.

<u>Решение.</u>





Рассмотрим треугольник ABC. Проведем высоту BH, так как в правильном треугольнике высота является и медианой, то AH = HC = 3 см. Все углы в правильном треугольнике равны 60^0. Рассмотрим треугольник ABH. Вычислим высоту BH. $\text{BH} = \text{AH}\ \text{t}g\ 60^0 = 3\sqrt{3}$см. Так как треугольник ABC правильный, то все три высоты равны между собой, а также они равны высотам треугольника $A_1B_1C_1$..

Значит, треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$, по признаку равенства треугольников по трем высотам, что и требовалось доказать.

6. Существует ли треугольник, высоты которого равны 4, 2, 8 сантиметров?

Решение. Если $h_{a,}\ h_{b,}\ h_c$ – высоты, опущенные на соответствующие стороны, то треугольник, заданный тремя высотами существует, если выполняются данные неравенства

$\frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c},$

$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b},$

$\frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a},$

Пусть $h_a = 8$ *см*, $h_b = 2$ *см*, $h_c = 4$ *см*. Проверим справедливость неравенств.

$\frac{1}{8} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{8} < \frac{6}{8}$ - неравенство верно,

$\frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \frac{4}{8} > \frac{1}{8}$ - неравенство неверно,

$\frac{1}{4} < \frac{1}{8} + \frac{1}{2}, \frac{2}{8} < \frac{5}{8}$ - неравенство верно.

Таким образом, треугольник, высоты которого равны 4, 2, 8 сантиметров не существует.

Ответ: не существует.

7 . Существует ли треугольник, медианы которого равны 6, 2, 11 сантиметров?

Решение. Если $m_{a,}\ m_{b,}\ m_c$ – медианы, проведенные на соответствующие стороны, то треугольник, заданный тремя медианами существует, если выполняются неравенства

$m_b < m_a + m_{c,}$

$m_c < m_b + m_{a,}$

$m_a < m_b + m_{c.}$

Пусть $m_a = 2$ *см*, $m_b = 6$ *см*, $m_c = 11$ *см*. Проверим справедливость неравенств.

$2 < 6 + 11,\ 2 < 17$ - неравенство верно,

$6 < 2 + 11,\ 6 < 13$ - неравенство верно,

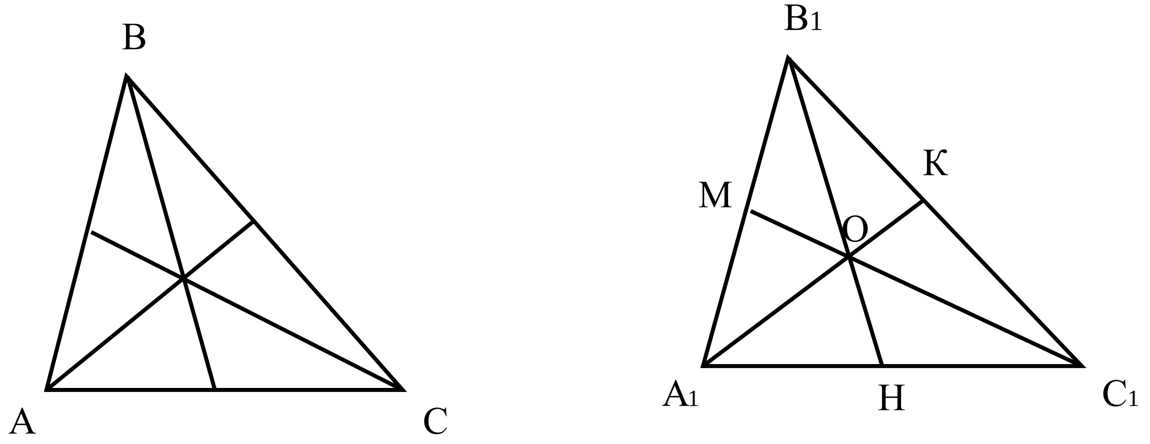
$11 < 2 + 6,\ 11 < 8$ - неравенство неверно.

Таким образом, треугольник, медианы которого равны 2, 11, 6 сантиметров не существует.

Ответ: не существует.

8. Доказать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если медианы треугольника ABC равны 9, 12, 15 сантиметров, точка O – точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, $A_1O = 6$ см, $B_1O = 8$ см, $C_1O = 10$ см .

Решение.



Зная, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, можем найти длины медиан треугольника $A_1B_1C_1$

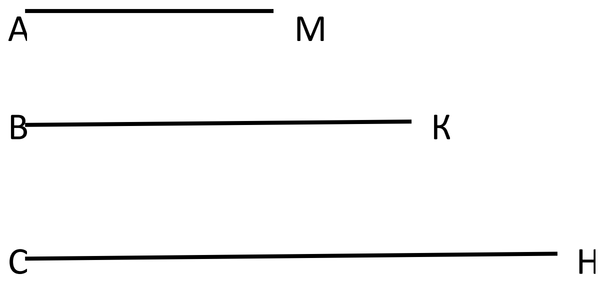
$$A_1K = \frac{3A_1O}{2} = \frac{18}{2} = 9(см),$$

$$C_1M = \frac{3C_1O}{2} = \frac{30}{2} = 15(см),$$

$$B_1H = \frac{3B_1O}{2} = \frac{24}{2} = 12(см).$$

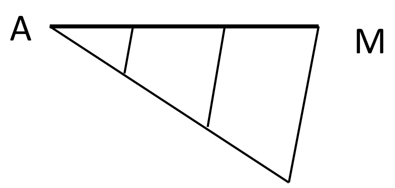
Мы видим, что медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, это значит, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по признаку равенства треугольников по трем медианам, что и требовалось доказать.

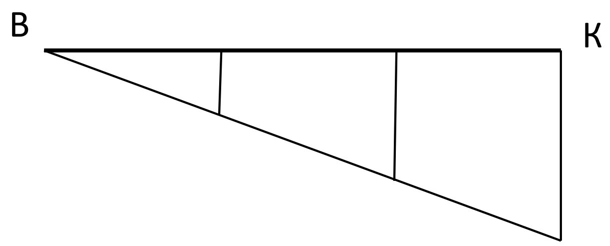
9. Даны три отрезка, построить треугольник ABC, в котором заданные отрезки являются медианами.

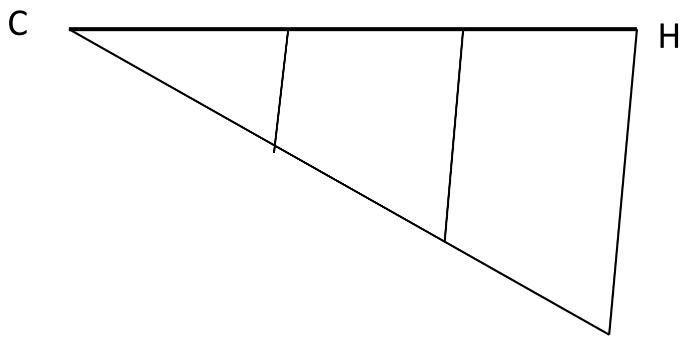


Построение.

1. С помощью теоремы Фалеса разделим заданные отрезки на три части.

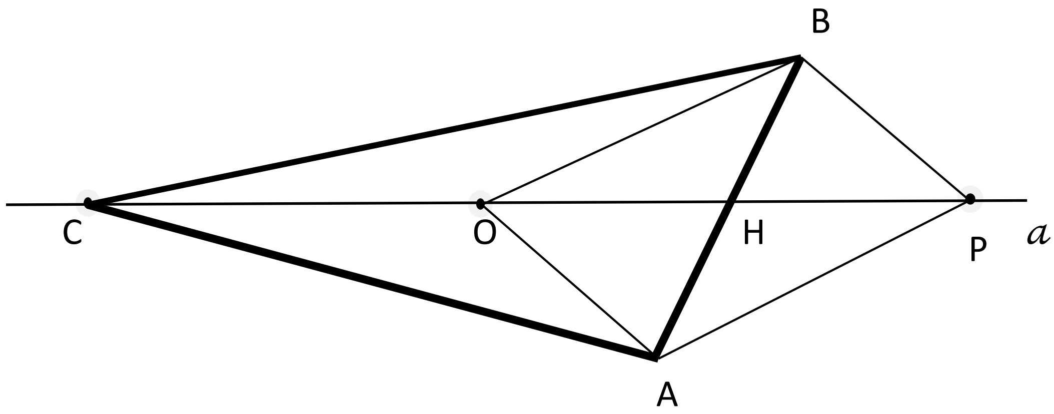






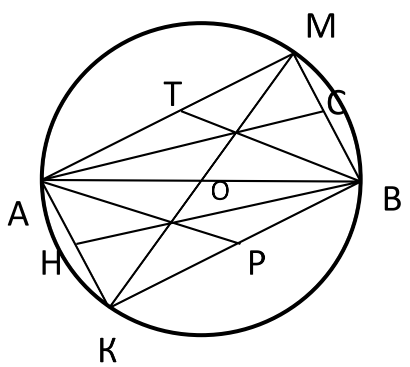
2. Построим произвольную прямую ω ;
3. CH; CH ∈ a;
4. CO; CO ∈ CH, $CO = \frac{2\,CH}{3}$;
5. OP; OP ∈ a, $OP = \frac{2\,CH}{3}$;
6. $\omega(O; OB)$, $OB = \frac{2\,BK}{3}$;

7. $\omega(P; OA)$, $OA = \frac{2\,AM}{3}$;
8. $\omega(O; OB) \cap \omega(P; OA) = B$;
9. $\omega(O; OA) \cap \omega(P; OB) = A$;
10. ΔABC - искомый.



10. В окружность вписаны треугольники АМВ и АКВ, таким образом, что АВ – диаметр, медианы АС, ВТ треугольника АМВ, соответственно равны медианам ВН и АР треугольника АКВ. Длина отрезка ТМ = 4 см, НК = 3 см. Найти а) периметр четырехугольника АМВК; б) радиус окружности.

Решение.



а) КО и МО являются медианами треугольников АКВ и АМВ соответственно, причем КО = МО, как радиусы окружности. Значит, $\Delta AKB = \Delta AMB$, по признаку равенства треугольников по трем медианам. АМ = КВ, АК

= MB, как соответствующие стороны равных треугольников. Причем, AM = 2TM = 8см, AK = 2KH = 6 (см) .

Четырехугольник AMBK является прямоугольником, так как $\angle K = \angle M = 90°$.

$P_{AMBK} = 2(AM + AK) = 28\ (см)$.

б) чтобы найти радиус окружности, рассмотрим треугольник AMB, он прямоугольный ($\angle M = 90°$). По теореме Пифагора найдем гипотенузу AB, которая является диаметром окружности

$AB^2 = AM^2 + MB^2 = 36 + 64 = 100$, AB = 10 (см).

Ответ: $P_{AMBK} = 28\ см$, AB = 10 см.