Государственное учреждение образования «Гимназия №10 г. Гродно»

Алгебра, геометрия и математический анализ

Решение функциональных уравнений

Автор работы:

Мартинович Екатерина Петровна,
8 «Б» класс
ГУО «Гимназия №10 г. Гродно»

Руководители работы:

Кулеш Елена Евгеньевна, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Я.Купалы, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Ермакова Анна Николаевна, учитель математики ГУО «Гимназия №10 г.Гродно»

г. Гродно, 2020

Содержание

Введение

Функция – основное понятие математики. Именно она позволяет изучать и описывать различные процессы природы и техники. Функции, содержащие модуль – особенная тема в школьном курсе математики. Исследование и построение графиков функций, содержащих знак модуля, появляется лишь эпизодически, в рамках изучения той или иной темы. Тем не менее, задачи, связанные с изучением функций, содержащих знак модуля, часто встречаются на математических олимпиадах, и математических турнирах.

Таким образом, научиться решать функциональные уравнения с параметрами, содержащие переменную и неизвестную функцию под знаком модуля, является весьма важной и актуальной задачей, чем и обусловлен выбор темы исследования.

В данной работе решена задача, предложенная на XXI Республиканском турнире юных математиков.

Постановка задачи. Во всех пунктах задачи функция f определена на всей числовой прямой и принимает действительные значения.

1.1. Существует ли такая функция f, что для любого действительного значения x выполнено равенство

$$x = f(|x|) + |f(x)|? \qquad (1)$$

1.2. Найдите все функции f такие, что для любого действительного x выполнено равенство

$$x = -\frac{1}{2} f(|x|) + |f(x)|. \qquad (2)$$

1.3. Найдите все функции f такие, что для любого действительного x выполнено равенство

$$x = \frac{3}{4} f(|x|) + |f(x)|. \qquad (3)$$

2.1. Найдите все значения параметра a, при которых функциональное уравнение

$$x = a f(|x|) + |f(x)| \qquad (4)$$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет более одного решения.

Под решением функционального уравнения (4) подразумевается наличие такой функции f, что равенство (4) будет верно для любого действительного значения x.

2.2. Найдите все значения параметров a и b, при которых функциональное уравнение

$$x = a f(|x|) + b|f(x)| \qquad (5)$$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет более одного решения.

3.1. Решите функциональное уравнение (5), если в левой части вместо функции x будет стоять

а) константа a_0;

б) линейное выражение $a_1x + a_0$;

хотя бы при каких-то конкретных значениях коэффициентов a_0, a_1.

Объект исследования: уравнения, содержащие функцию и переменную под знаком модуля.

Предмет исследования: наличие и количество решений указанных уравнений.

Цель работы: научиться решать функциональные уравнения, содержащие переменную и функцию под знаком модуля, анализировать количество полученных решений в зависимости от входящих в уравнение параметров, обобщать полученные результаты, записывать наиболее общий вид решений рассматриваемых уравнений.

Основным **методом** решения является метод снятия модуля со знаком «+» или «–» в зависимости от знака подмодульного выражения и анализ полученного решения.

Полученные результаты являются новыми и ранее не публиковались.

Основная часть

1.1. *Существует ли такая функция* f*, что для любого действительного значения* x *выполнено равенство*

$$x = f(|x|) + |f(x)|? \qquad (1)$$

Уравнение (1) содержит два модуля. Раскроем их.

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), x \ge 0; \\ f(-x), x < 0; \end{cases} \qquad |f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \ge 0; \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, возможно 4 варианта.

1) Пусть $x \ge 0$, $f(x) \ge 0$. Тогда уравнение (1) примет вид $x = f(x) + f(x)$. Откуда найдем $x = 2f(x)$, т.е. $f(x) = \frac{x}{2}$.

2) Пусть $x \ge 0$, $f(x) < 0$. Тогда уравнение (1) примет вид $x = f(x) - f(x)$. т.е. $x = 0$. В этом случае уравнение (1) не имеет решений.

3) Пусть $x < 0$, $f(x) \ge 0$. Тогда уравнение (1) примет вид $x = f(-x) + f(x)$. Так как $-x > 0$, то $f(-x) = \frac{-x}{2}$. Тогда уравнение (1) примет вид $x = \frac{-x}{2} + f(x)$. Откуда найдем $f(x) = \frac{3x}{2}$. С учетом того что $x < 0$ получим $f(x) = \frac{3x}{2} < 0$, что противоречит условию $f(x) \ge 0$. Значит в этом случае уравнение (1) не имеет решений.

4) Пусть $x<0$, $f(x)<0$. Тогда уравнение (1) примет вид $x=f(-x)-f(x)$. Так как $-x>0$, то $f(-x)=\frac{-x}{2}$. Тогда уравнение (1) примет вид $x=\frac{-x}{2}-f(x)$. Откуда найдем $f(x)=-\frac{3x}{2}$. С учетом того что $x<0$ получим $f(x)=-\frac{3x}{2}>0$, что противоречит условию $f(x)<0$. Значит в этом случае уравнение (1) не имеет решений. Представим полученные результаты в виде таблицы.

	$x\geq 0$	$x<0$
$f(x)\geq 0$	$x=f(x)+f(x)$; $x=2f(x)$; $f(x)=\frac{x}{2}$;	$x=f(-x)+f(x)$; $x=\frac{-x}{2}+f(x)$; $f(x)=\frac{3x}{2}<0$; нет решений
$f(x)<0$	$x=f(x)-f(x)$; $x=0$; нет решений	$x=f(-x)-f(x)$; $x=\frac{-x}{2}-f(x)$; $f(x)=-\frac{3x}{2}>0$; нет решений

Ответ: уравнение (1) не имеет решений.

1.2 *Найдите все функции* f *такие, что для любого действительного* x *выполнено равенство*

$$x=-\frac{1}{2}f(|x|)+|f(x)|. \qquad (2)$$

Рассуждаем аналогично, как в предыдущем пункте. Представим полученные результаты в виде таблицы.

	$x\geq 0$	$x<0$
$f(x)\geq 0$	$x=-\frac{1}{2}f(x)+f(x)$; $x=\frac{1}{2}f(x)$; $f(x)=2x$;	$x=-\frac{1}{2}f(-x)+f(x)$; $-x>0$; 1) $f(-x)\geq 0$; $x=-\frac{1}{2}(-2x)+f(x)$; $f(x)=0$; 2) $f(-x)<0$; $x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x+f(x)$; $f(x)=\frac{4}{3}x<0$; нет решений
$f(x)<0$	$x=-\frac{1}{2}f(x)-f(x)$; $x=-\frac{3}{2}f(x)$; $f(x)=-\frac{2}{3}x$;	$x=-\frac{1}{2}f(-x)-f(x)$; $-x>0$; 1) $f(-x)\geq 0$; $x=-\frac{1}{2}(-2x)-f(x)$; $f(x)=0$; нет решений; 2) $f(-x)<0$; $x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x-f(x)$; $f(x)=-\frac{4}{3}x>0$; нет решений

Ответ: единственное решение $f(x)=\begin{cases}2x, x\ge 0;\\ 0, x<0.\end{cases}$

1.3 *Найдите все функции* f *такие, что для любого действительного* x *выполнено равенство*

$$x=\frac{3}{4}f(|x|)+|f(x)|. \qquad (3)$$

Представим полученные результаты в виде таблицы.

	$x\ge 0$	$x<0$
$f(x)\ge 0$	$x=\frac{3}{4}f(x)+f(x)$; $x=\frac{7}{4}f(x)$; $f(x)=\frac{4}{7}x$;	$x=\frac{3}{4}f(-x)+f(x)$; $-x>0$; 1) $f(-x)\ge 0$; $x=\frac{3}{4}\left(-\frac{4x}{7}\right)+f(x)$; $f(x)=\frac{10x}{7}<0$; нет решений 2) $f(-x)<0$; $x=\frac{3}{4}\cdot 4x+f(x)$; $f(x)=-2x$;
$f(x)<0$	$x=\frac{3}{4}f(x)-f(x)$; $x=-\frac{1}{4}f(x)$; $f(x)=-4x$;	$x=\frac{3}{4}f(-x)-f(x)$; $-x>0$; 1) $f(-x)\ge 0$; $x=\frac{3}{4}\left(-\frac{4x}{7}\right)-f(x)$; $f(x)=-\frac{10x}{7}>0$; нет решений; 2) $f(-x)<0$; $x=\frac{3}{4}\cdot 4x-f(x)$; $f(x)=2x$.

Итак, получили два решения $f(x)=\begin{cases}-4x, x\ge 0;\\ -2x, x<0;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}-4x, x\ge 0;\\ 2x, x<0.\end{cases}$

На их основе можем построить бесконечное число решений, например

$$f(x)=\begin{cases}-4x, x\ge 0;\\ -2x, -n\le x<0; n\in \mathrm{N}\\ 2x, x<-n;\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}-4x, x\ge 0;\\ 2x, x<0, x\in \mathrm{Z};\\ -2x, x<0, x\notin \mathrm{Z};\end{cases}\quad \text{и др.}$$

В общем виде эти функции можно задать следующим образом

$$f(x)=\begin{cases}-4x, x\ge 0;\\ h(x)\cdot 2x, x<0;\end{cases}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$, например

$h(x)=\pm 1$, $\quad h(x)=\begin{cases}1, -n\le x<0;\\ -1, x>-n;\end{cases}$ $n\in \mathrm{N}$, $\quad h(x)=\begin{cases}1, -2n+1\le x<-2n+2;\\ -1, -2n\le x<-2n+1;\end{cases}$ $n\in \mathrm{N}$,

$h(x)=\begin{cases}1, x<0, x\in \mathrm{Z};\\ -1, x<0, x\notin \mathrm{Z};\end{cases}$ и др.

Ответ: бесконечное число решений вида $f(x)=\begin{cases}-4x, x\ge 0;\\ h(x)\cdot 2x, x<0;\end{cases}$ где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

2.1. *Найдите все значения параметра* a, *при которых функциональное уравнение*

$$x=a f(|x|)+|f(x)| \qquad (4)$$

а) не имеет решений;
б) имеет единственное решение;
в) имеет более одного решения.

Отметим, что в случае $a=1$ уравнение (4) имеет вид (1) и не имеет решений. Рассмотрим отдельно случай $a=-1$.

	$x\ge 0$	$x<0$
$f(x)\ge 0$	$x=-f(x)+f(x)$; $x=0$; нет решений	$x=-f(-x)+f(x)$; $x=\frac{x}{2}+f(x)$; $f(x)=\frac{x}{2}<0$; нет решений
$f(x)<0$	$x=-f(x)-f(x)$; $x=-2f(x)$; $f(x)=\frac{-x}{2}$;	$x=-f(-x)-f(x)$; $x=\frac{x}{2}-f(x)$; $f(x)=-\frac{x}{2}>0$; нет решений

Таким образом, при $a=-1$ уравнение (4) не имеет решений.

Пусть $a\ne \pm 1$.

	$x\ge 0$	$x<0$
$f(x)\ge 0$	$x=af(x)+f(x)$; $x=(a+1)f(x)$; $f(x)=\frac{x}{a+1}$. $f(x)\ge 0$ при a>–1. Если a<–1, то нет решений.	$x=af(-x)+f(x)$; $-x>0$; 1) Пусть $f(-x)\ge 0$, a>–1. Тогда $x=a\left(\frac{-x}{a+1}\right)+f(x)$; $f(x)=x\left(\frac{a}{a+1}+1\right)$; $f(x)=\frac{2a+1}{a+1}x$. $f(x)\ge 0$ при $2a+1\le 0$, т.е. при $-1<a\le -\frac{1}{2}$.

		При $a>-\frac{1}{2}$ получим $f(x)<0$, значит, нет решений. 2) Пусть $f(-x)<0$, a<1. Тогда $x=a\left(-\frac{x}{a-1}\right)+f(x)$; $f(x)=\frac{2a-1}{a-1}x$. $f(x)\ge 0$ при $2a-1\ge 0$, т.е. при $\frac{1}{2}\le a<1$. При $a<\frac{1}{2}$ получим $f(x)<0$, значит, нет решений.
$f(x)<0$	$x=af(x)-f(x)$; $x=(a-1)f(x)$; $f(x)=\frac{x}{a-1}$. $f(x)<0$ при a<1. Если a>1, то нет решений.	$x=af(-x)-f(x)$; $-x>0$; 1) Пусть $f(-x)\ge 0$, a>–1. Тогда $x=a\left(-\frac{x}{a+1}\right)-f(x)$; $f(x)=-\frac{2a+1}{a+1}x$. $f(x)<0$ при $2a+1<0$, т.е. при $-1<a<-\frac{1}{2}$. При $a\ge -\frac{1}{2}$ получим $f(x)\ge 0$, значит, нет решений. 2) Пусть $f(-x)<0$, a<1. Тогда $x=a\left(-\frac{x}{a-1}\right)-f(x)$; $f(x)=-\frac{2a-1}{a-1}x$. $f(x)<0$ при $2a-1>0$, т.е. при $\frac{1}{2}<a<1$. При $a\le\frac{1}{2}$ получим $f(x)\ge 0$, значит, нет решений.

Итак, получили следующие решения

При $a\in(-\infty;-1]\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup[1;+\infty)$ уравнение (4) не имеет решений.

При $a=-\frac{1}{2}$ уравнение (4) имеет одно решение

$$f(x)=\begin{cases}2x, x\ge 0;\\ 0, x<0.\end{cases} \tag{6}$$

При $a=\frac{1}{2}$ уравнение (4) имеет одно решение

$$f(x)=\begin{cases}-2x, x\ge 0;\\ 0, x<0.\end{cases} \tag{7}$$

При $-1 < a < -\frac{1}{2}$, уравнение (4) имеет два решения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a+1}, x \ge 0; \\ \frac{2a+1}{a+1} x, x < 0; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a+1}, x \ge 0; \\ -\frac{2a+1}{a+1} x, x < 0; \end{cases}$$

на основе которых можно построить бесконечное множество решений вида

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a+1}, x \ge 0; \\ h(x) \cdot \frac{2a+1}{a+1} x, x < 0; \end{cases} \tag{8}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

При $\frac{1}{2} < a < 1$, уравнение (4) имеет два решения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a-1}, x \ge 0; \\ \frac{2a-1}{a-1} x, x < 0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a-1}, x \ge 0; \\ -\frac{2a-1}{a-1} x, x < 0; \end{cases}$$

на основе которых можно построить бесконечное множество решений вида

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a-1}, x \ge 0; \\ h(x) \cdot \frac{2a-1}{a-1} x, x < 0; \end{cases} \tag{9}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

Ответ: при $a \in (-\infty;-1] \cup \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \cup [1;+\infty)$ нет решений;

при $a = -\frac{1}{2}$ одно решение (6);

при $a = \frac{1}{2}$ одно решение (7);

при $a \in \left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ бесконечное множество решений (8);

при $a \in \left(\frac{1}{2};1\right)$ бесконечное множество решений (9).

2.2. *Найдите все значения параметров a и b, при которых функциональное уравнение*

$$x = a\,f(|x|) + b\,|f(x)| \qquad (5)$$

а) не имеет решений;

б) имеет единственное решение;

в) имеет более одного решения.

Отметим, что при $a = b = 0$ уравнение (5) не имеет решений.

Рассмотрим случай $a = 0, b \neq 0$. Уравнение (5) примет вид $x = b\,|f(x)|$, откуда $|f(x)| = \frac{x}{b}$. Очевидно необходимо требовать $\frac{x}{b} \geq 0$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$, что невозможно при фиксированном *b*. Таким образом, при $a = 0, b \neq 0$ уравнение (5) не имеет решений.

Рассмотрим случай $a \neq 0, b = 0$. Уравнение (5) примет вид $x = af(|x|)$, откуда $f(|x|) = \frac{x}{a}$.

	$x \geq 0$	$x < 0$
$f(x) \geq 0$	$f(x) = \frac{x}{a}$. $f(x) \geq 0$ при a>0.	$f(-x) = \frac{x}{a}$; $-\frac{x}{a} = \frac{x}{a}$ Нет решений.
$f(x) < 0$	$f(x) = \frac{x}{a}$. $f(x) < 0$ при a<0.	$f(-x) = \frac{x}{a}$; $-\frac{x}{a} = \frac{x}{a}$ Нет решений.

Таким образом, при $a \neq 0, b = 0$ уравнение (5) не имеет решений.

Рассмотрим случай $b = a$. Уравнение (5) примет вид

$$x = a\,f(|x|) + a\,|f(x)|.$$

	$x \geq 0$	$x < 0$
$f(x) \geq 0$	$x = a\,f(x) + af(x)$; $x = 2a\,f(x)$; $f(x) = \frac{x}{2a}$ $f(x) \geq 0$ при a>0.	$x = a\,f(-x) + af(x)$; $-x > 0$, a>0; $x = a\left(-\frac{x}{2a}\right) + af(x)$ $f(x) = \frac{3x}{2a}$; $f(x) < 0$ при a>0, нет решений.
$f(x) < 0$	$x = a\,f(x) - af(x)$; $x = 0$; нет решений·	$x = a\,f(-x) - af(x)$; $-x > 0$, a>0; $x = a\left(-\frac{x}{2a}\right) - af(x)$ $f(x) = -\frac{3x}{2a}$; $f(x) > 0$ при a>0, нет решений.

Таким образом, при $b = a$ уравнение (5) не имеет решений.

Рассмотрим случай $b = -a$. Уравнение (5) примет вид $x = a\,f(|x|) - a\,|f(x)|$.

	$x \geq 0$	$x < 0$
$f(x) \geq 0$	$x = a\,f(x) - af(x)$;	$x = a\,f(-x) - af(x)$;

	$x=0$; нет решений·	$-x>0$, a<0; $x=a\left(-\frac{x}{2a}\right)-af(x)$ $f(x)=\frac{3x}{2a}$; $f(x)<0$ при a>0, нет решений.
$f(x)<0$	$x=af(x)+af(x)$; $x=2af(x)$ $f(x)=\frac{x}{2a}$ $f(x)<0$ при a<0.	$x=af(-x)+af(x)$; $-x>0$, a<0; $x=a\left(-\frac{x}{2a}\right)+af(x)$ $f(x)=\frac{3x}{2a}$; $f(x)>0$ при a>0, нет решений.

Таким образом, при $b=-a$ уравнение (5) не имеет решений.

Пусть $ab\neq 0$, $b\neq \pm a$.

	$x\geq 0$	$x<0$
$f(x)\geq 0$	$x=af(x)+bf(x)$; $x=(a+b)f(x)$; $f(x)=\frac{x}{a+b}$. $f(x)\geq 0$ при a+b>0. Если a+b<0, то нет решений.	$x=af(-x)+bf(x)$; $-x>0$; 1) Пусть $f(-x)\geq 0$, a+b>0. Тогда $x=a\left(-\frac{x}{a+b}\right)+bf(x)$; $f(x)=\frac{2a+b}{b(a+b)}x$. $f(x)\geq 0$ при $\frac{2a+b}{b}\leq 0$, т.е. при $\frac{a}{b}\leq -\frac{1}{2}$. При $\frac{a}{b}>-\frac{1}{2}$ получим $f(x)<0$, значит, нет решений. 2) Пусть $f(-x)<0$, a–b<0. Тогда $x=a\left(-\frac{x}{a-b}\right)+bf(x)$; $f(x)=\frac{2a-b}{b(a-b)}x$. $f(x)\geq 0$ при $\frac{2a-b}{b}\geq 0$, т.е. при $\frac{a}{b}\geq\frac{1}{2}$. При $\frac{a}{b}<\frac{1}{2}$ получим $f(x)<0$, значит, нет решений.
$f(x)<0$	$x=af(x)-bf(x)$; $x=(a-b)f(x)$; $f(x)=\frac{x}{a-b}$. $f(x)<0$ при a–b<0. Если a–b>0, то нет решений.	$x=af(-x)-bf(x)$; $-x>0$; 1) Пусть $f(-x)\geq 0$, a+b>0. Тогда $x=a\left(-\frac{x}{a+b}\right)-bf(x)$; $f(x)=-\frac{2a+b}{b(a+b)}x$ $f(x)<0$ при $\frac{2a+b}{b}<0$, т.е. при $\frac{a}{b}<-\frac{1}{2}$. При $\frac{a}{b}\geq -\frac{1}{2}$ получим $f(x)\geq 0$, значит, нет решений. 2) Пусть $f(-x)<0$, a–b<0. Тогда

		$x = a\left(-\dfrac{x}{a-b}\right) - bf(x)$; $f(x) = -\dfrac{2a-b}{b(a-b)}x$. $f(x) < 0$ при $\dfrac{2a-b}{b} > 0$, т.е. при $\dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{2}$. При $\dfrac{a}{b} \le \dfrac{1}{2}$ получим $f(x) \ge 0$, значит, нет решений.

Итак, получили следующие решения уравнения (5).

Пусть $\begin{cases} a+b>0; \\ \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a; \\ a<0; \end{cases}$ и $\begin{cases} a-b<0; \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a; \\ a>0. \end{cases}$

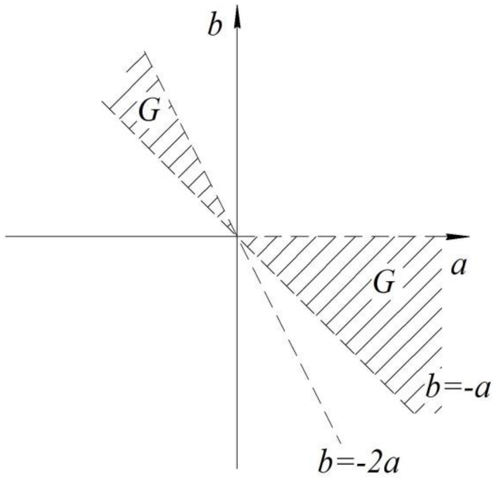
Последние два условия можно записать в виде одного $b = 2|a|$.

Уравнение (5) имеет одно решение при $b = 2|a|$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{a}, x \ge 0; \\ 0, x < 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Обозначим через G множество значений (a,b), удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a+b>0; \\ \dfrac{a}{b} < -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b>-a; \\ b>0; \\ b<-2a; \end{cases} \\ \begin{cases} b>-a; \\ b<0; \\ b>-2a; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a<b<-2a; \\ -a<b<0. \end{array}\right.$$



Уравнение (5) имеет два решения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a+b}, x \ge 0; \\ \pm\dfrac{2a+b}{b(a+b)}x, x < 0; \end{cases}$$

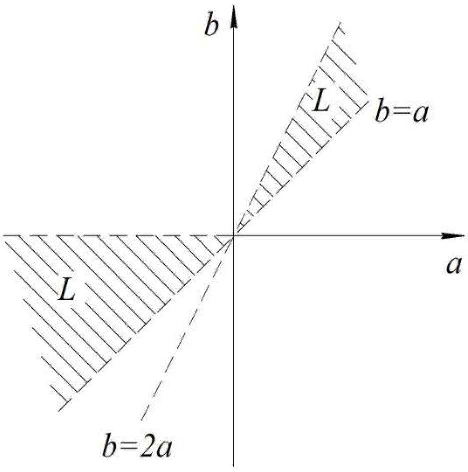
если $(a,b) \in G$. На основе этих решений можно построить бесконечное число решений

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a+b}, x \ge 0; \\ h(x) \cdot \dfrac{2a+b}{b(a+b)}x, x < 0; \end{cases} \qquad (11)$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)| = 1$.

Обозначим через L множество значений (a,b), удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a-b<0; \\ \dfrac{a}{b}>\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b>a; \\ b>0; \\ b<2a; \end{cases} \\ \begin{cases} b>a; \\ b<0; \\ b>2a; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<b<2a; \\ a<b<0. \end{array} \right.$$



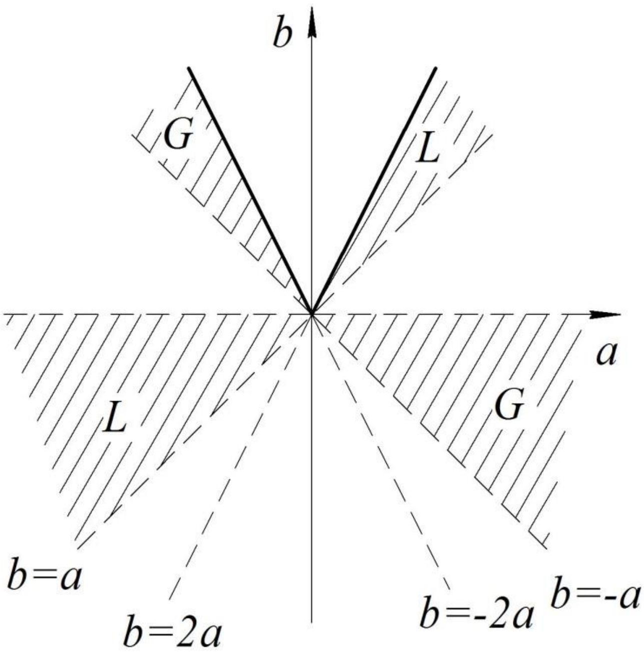
Уравнение (5) имеет два решения

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}, x\ge 0; \\ \pm\dfrac{2a-b}{b(a-b)}x, x<0; \end{cases}$$

если $(a,b)\in L$. На основе этих решений можно построить бесконечное число решений

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}, x\ge 0; \\ h(x)\cdot\dfrac{2a-b}{b(a-b)}x, x<0; \end{cases} \qquad (12)$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.



Ответ: Уравнение (5) имеет

* бесконечное число решений (11) при $-a<b<-2a$ и при $-a<b<0$ (заштрихованная область G);

* бесконечное число решений (12) при $a<b<2a$ и при $a<b<0$ (заштрихованная область L);

*одно решение (10) при $b=0, a\neq 0,\ b=2|a|$ (выделено жирной линией);
*не имеет решения при $b>2|a|,\ 0\leq b\leq |a|,\ b\leq -|a|$.

3.1. *Решите функциональное уравнение*

$$a_0 = a\, f(|x|) + b|\, f(x)| \tag{13}$$

если a_0 константа.

Отметим, что при $a_0=a=b=0$ уравнение (13) имеет бесконечное множество решений, т.к. произвольная функция $f(x)$ является решением. При $a_0\neq 0, a=b=0$ уравнение (13) не имеет решений.

Рассмотрим случай $a=0, b\neq 0$. Уравнение (13) примет вид $a_0=b|\,f(x)|$, откуда $|\,f(x)|=\dfrac{a_0}{b}$. Если $a_0 b<0$, то уравнение (13) не имеет решений; если $a_0=0$, то имеет одно решение $f(x)\equiv 0$; если $a_0 b>0$, то бесконечное множество решений вида

$$f(x)=h(x)\cdot\frac{a_0}{b}, \tag{14}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на всей числовой прямой, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$, например, $f(x)=\begin{cases}\pm\dfrac{a_0}{b}, x\geq 0;\\ \mp\dfrac{a_0}{b}, x<0;\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b}, x\in Z;\\ -\dfrac{a_0}{b}, x\notin Z;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b}, 2k\leq x\leq 2k+1;\\ -\dfrac{a_0}{b}, 2k+1\leq x\leq 2k+2;\end{cases}$ $f(x)=\pm\dfrac{a_0}{b}$ где $k\in N$ и др.

Рассмотрим случай $a\neq 0, b=0$. Уравнение (13) примет вид $a_0=af(|x|)$, откуда $f(|x|)=\dfrac{a_0}{a}$, и, следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{a}, x\geq 0;\\ g(x), x<0;\end{cases} \tag{15}$$

где $g(x)$ произвольная функция, т.е. бесконечное множество решений.

Пусть далее $ab\neq 0$.

Рассмотрим случай $a_0=0$. Уравнение (13) примет вид $0=a\,f(|x|)+b|\,f(x)|$

	$x\geq 0$	$x<0$
$f(x)\geq 0$	$0=a\,f(x)+bf(x)$; $0=(a+b)\,f(x)$; если $b=-a$, то	$0=a\,f(-x)+bf(x)$; $-x>0$, 1) $f(-x)\geq 0$.

	$f(x)=g(x)$, где $g(x)$ – произвольная функция, $g(x)\ge 0$; если $b\ne -a$, то $f(x)\equiv 0$.	если $b=-a$, то $0=ag(-x)-af(x)$, $f(x)=g(-x)$; если $b\ne -a$, то $0=bf(x)$, $f(x)\equiv 0$. 2) $f(-x)<0$. если $b=a$, то $0=ag(-x)+af(x)$, $f(x)=-g(-x)$,
$f(x)<0$	$0=af(x)-bf(x)$; $0=(a-b)f(x)$ если $b=a$, то $f(x)=g(x)$ где $g(x)$ – произвольная функция, $g(x)<0$; если $b\ne a$, то нет решений.	$0=af(-x)-bf(x)$; $-x>0$, 1) $f(-x)\ge 0$. если $b=-a$, то $0=ag(-x)+af(x)$, $f(x)=-g(-x)$; если $b\ne -a$, то $0=-bf(x)$, $f(x)\equiv 0$ – не удовлетворяет условию $f(x)<0$, нет решений. 2) $f(-x)<0$. если $b=a$, то $0=ag(-x)-af(x)$, $f(x)=g(-x)$,

Итак, уравнение (13) имеет

при $a_0=0, b\ne -a,\ \ f(x)\equiv 0$ – одно решение.

при $a_0=0, b=-a$

$$f(x)=\begin{cases} g(x), x\ge 0;\\ g(-x), x<0;\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} g(x), x\ge 0;\\ -g(-x), x<0;\end{cases} \tag{16}$$

где $g(x)\ge 0$, при $x\ge 0$ – произвольная функция, т.е. бесконечное число решений.

при $a_0=0, b=a$

$$f(x)=\begin{cases} g(x), x\ge 0;\\ -g(-x), x<0;\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} g(x), x\ge 0;\\ g(-x), x<0;\end{cases} \tag{17}$$

где $g(x)<0$, при $x\ge 0$–произвольная функция, т.е. бесконечное число решений.

Заметим, что при $a_0=0$ решение $f(x)\equiv 0$ есть и при $b=-a$, если выбрать функцию $g(x)\equiv 0$.

Пусть далее $a_0\ne 0$.

	$x\ge 0$	$x<0$
$f(x)\ge 0$	$a_0=af(x)+bf(x)$; $a_0=(a+b)f(x)$. Если $b=-a$, то нет решений. Если $b\ne -a$, то	$a_0=af(-x)+bf(x)$; $-x>0$; 1) Пусть $f(-x)\ge 0$, $a_0(a+b)>0$. Тогда $a_0=a\cdot\dfrac{a_0}{a+b}+bf(x)$; $f(x)=\dfrac{a_0}{a+b}$.

	$f(x)=\dfrac{a_0}{a+b}$. $f(x)\geq 0$ при $a_0(a+b)>0$. Если $a_0(a+b)<0$, то нет решений.	2) Пусть $f(-x)<0$, $a_0(a-b)<0$. Тогда $a_0=a\cdot\dfrac{a_0}{a-b}+bf(x);\ f(x)=-\dfrac{a_0}{a-b}$.
$f(x)<0$	$a_0=af(x)-bf(x);$ $a_0=(a-b)f(x).$ Если $b=a$, то нет решений. Если $b\neq a$, то $f(x)=\dfrac{a_0}{a-b}$. $f(x)<0$ при $a_0(a-b)<0$. Если $a_0(a-b)>0$, то нет решений.	$a_0=af(-x)-bf(x);$ $-x>0;$ 1) Пусть $f(-x)\geq 0$, $a_0(a+b)>0$. Тогда $a_0=a\cdot\dfrac{a_0}{a+b}-bf(x);\ f(x)=-\dfrac{a_0}{a+b}$ 2) Пусть $f(-x)<0$, $a_0(a-b)<0$. Тогда $a_0=a\cdot\dfrac{a_0}{a-b}-bf(x);\ f(x)=\dfrac{a_0}{a-b}$.

Если $a_0(a+b)>0$, то уравнение (13) имеет два решения

$$f(x)=\frac{a_0}{a+b}; \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{a+b}, x\geq 0;\\ -\dfrac{a_0}{a+b}, x<0.\end{cases}$$

На основе этих решений можно построить бесконечное число решений

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{a+b}, x\geq 0;\\ h(x)\cdot\dfrac{a_0}{a+b}, x<0.\end{cases} \tag{18}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

Если $a_0(a-b)<0$, то уравнение (13) имеет два решения

$$f(x)=\frac{a_0}{a-b}; \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{a-b}, x\geq 0;\\ -\dfrac{a_0}{a-b}, x<0.\end{cases}$$

На основе этих решений можно построить бесконечное число решений

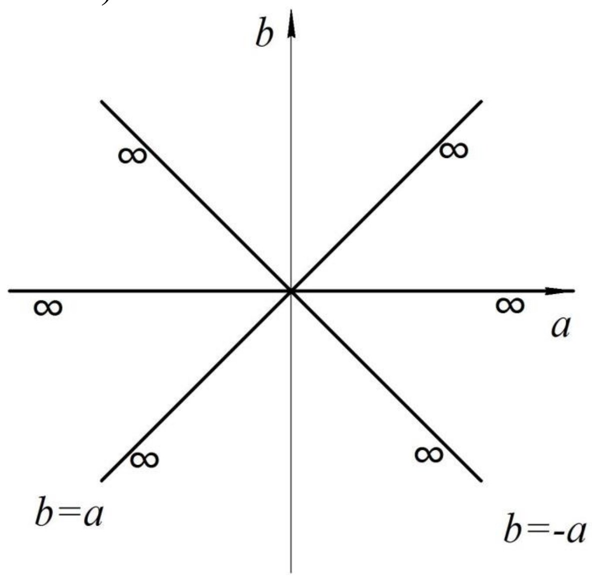
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{a-b}, x\geq 0;\\ h(x)\cdot\dfrac{a_0}{a-b}, x<0.\end{cases} \tag{19}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

Ответ: при $a_0=0$ уравнение (13) имеет

*одно решение $f(x)\equiv 0$ при всех a,b;

*бесконечно множество решений (15) при $b=0$; (16) при $b=-a$; (17) при $b=a$ (выделено жирной линией).



$a_0=0$

При $a_0>0$ уравнение (13) имеет

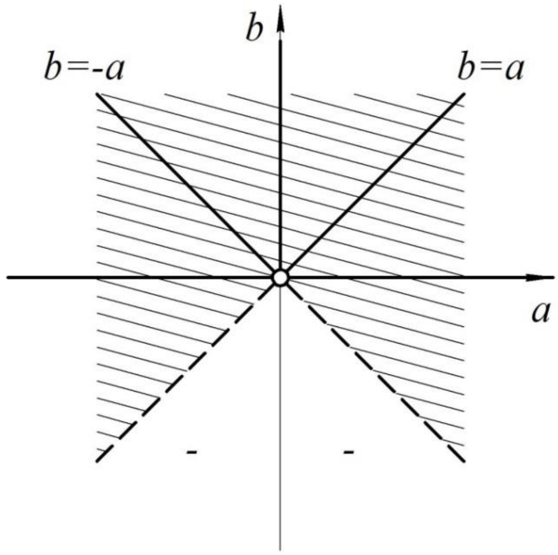
*бесконечно множество решений (15) при $b=0, a\neq 0$; (18) при $-a<b\leq a$; (19) при $a<b\leq -a$; (18) и (19) при $b>|a|$.

*нет решений при $b\leq -|a|$.

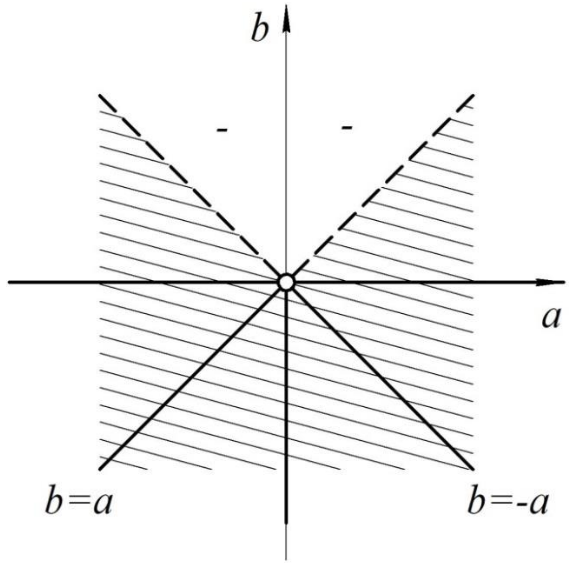
При $a_0<0$ уравнение (13) имеет

*бесконечно множество решений (15) при $b=0, a\neq 0$; (18) при $a\leq b<-a$; (19) при $-a\leq b<a$; (18) и (19) при $b<-|a|$.

*нет решений при $b\geq |a|$.



$a_0>0$



$a_0<0$

3.2. *Решите функциональное уравнение*

$$a_1 x + a_0 = a\,f(|x|) + b\,|\,f(x)| \qquad (20)$$

если $a_0, a_1 -$ *константы (*$a_1 \neq 0$*).*

Частный случай, когда $a_0 = 0, a_1 = 1$ рассмотрен в пункте 2.2.

	$x \geq 0$	$x < 0$
$f(x) \geq 0$	$a_1x + a_0 = af(x) + bf(x);$ $a_1x + a_0 = (a+b)f(x);$ Если $b = -a$, то $a_1x + a_0 = 0$ – нет решений. Пусть $b \neq -a$, тогда $f(x) = \dfrac{a_1x + a_0}{a+b}.$	$a_1x + a_0 = af(-x) + bf(x);$ $-x > 0;$ 1) Пусть $f(-x) \geq 0$, тогда $a_1x + a_0 = a \cdot \dfrac{-a_1x + a_0}{a+b} + bf(x);$ При $b = 0$ нет решений. При $b \neq 0$ $f(x) = \dfrac{a_1x(2a+b) + ba_0}{b(a+b)};$ 2) Пусть $f(-x) < 0$, тогда $a_1x + a_0 = a \cdot \dfrac{-a_1x + a_0}{a-b} + bf(x);$ При $b = 0$ нет решений. При $b \neq 0$ $f(x) = \dfrac{a_1x(2a-b) - ba_0}{b(a-b)}.$
$f(x) < 0$	$a_1x + a_0 = af(x) - bf(x);$ $a_1x + a_0 = (a-b)f(x);$ Если $b = a$, то $a_1x + a_0 = 0$ – нет решений. Пусть $b \neq a$, тогда $f(x) = \dfrac{a_1x + a_0}{a-b}.$	$a_1x + a_0 = af(-x) - bf(x);$ $-x > 0;$ 1) Пусть $f(-x) \geq 0$, тогда $a_1x + a_0 = a \cdot \dfrac{-a_1x + a_0}{a+b} - bf(x);$ При $b = 0$ нет решений. При $b \neq 0$ $f(x) = -\dfrac{a_1x(2a+b) + ba_0}{b(a+b)};$ 2) Пусть $f(-x) < 0$, тогда. $a_1x + a_0 = a \cdot \dfrac{-a_1x + a_0}{a-b} - bf(x);$ При $b = 0$ нет решений. При $b \neq 0$ $f(x) = -\dfrac{a_1x(2a-b) - ba_0}{b(a-b)}.$

Рассмотрим условия существования функции $f(x)$.

I) Пусть $a_1 > 0, a_0 \geq 0$, тогда $\dfrac{a_0}{a_1} \geq 0$.

При $x \geq 0, f(x) \geq 0$ получим

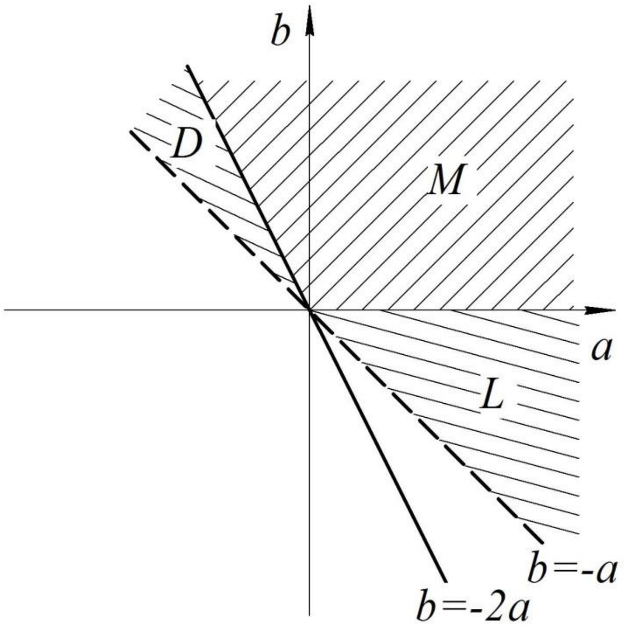
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1(a+b) > 0; \\ x \geq -\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1(a+b) < 0; \\ x \leq -\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b > 0; \\ x \geq -\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases} \\ \begin{cases} a+b < 0; \\ x \leq -\dfrac{a_0}{a_1} \leq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a+b > 0.$$

При $x \geq 0, f(x) < 0$ получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1(a-b) > 0; \\ x < -\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1(a+b) < 0; \\ x > -\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-b > 0; \\ x < -\dfrac{a_0}{a_1} \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a-b < 0; \\ x > -\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a-b < 0.$$

При $x<0, f(x)\ge 0 \quad f(-x)\ge 0$ имеем $f(x)=\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}$. Если $b=-2a$, то $f(x)=\dfrac{a_0}{a+b}=\dfrac{a_0}{-a}\ge 0$ при $a<0$. Пусть $b\ne -2a$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a+b>0;\\ b(2a+b)>0;\\ x\ge\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a+b>0;\\ b(2a+b)<0;\\ x\le\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a+b>0;\\ b>0;\\ 2a+b>0;\\ x\ge\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a+b>0;\\ b<0;\\ 2a+b<0;\\ x\ge\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a+b>0;\\ b>0;\\ 2a+b<0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a+b>0;\\ b<0;\\ 2a+b>0;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}b>-a;\\ b>0;\\ b>-2a;\\ x\ge\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}b>-a;\\ b<0;\\ b<-2a;\\ x\ge\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}b>-a;\\ b>0;\\ b<-2a;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}b>-a;\\ b<0;\\ b>-2a;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}b>0;\\ b>-2a;\\ x\ge\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{array}\right.\\ -a<b<-2a;\\ -a<b<0.\end{array}\right.$$



Таким образом, при $\left[\begin{array}{l}-a<b<-2a;\\ -a<b<0;\end{array}\right.$ т.е. в областях D и L имеем решение

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, x\ge 0;\\ \dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, x<0.\end{array}\right.$$

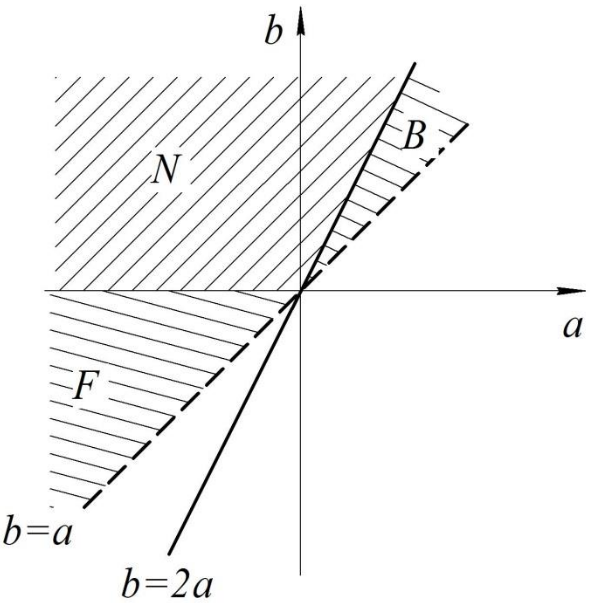
При $\left\{\begin{array}{l}b>0;\\ b>-2a;\end{array}\right.$ т.е. в области M имеем решение

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, 0\le x\le\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};\\ \dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}\le x<0;\end{array}\right.$$

(позже попытаемся продолжить его далее на всю числовую прямую).

При $x<0, f(x)\ge 0$ $f(-x)<0$ имеем $f(x)=\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}$. Если $b=2a$, то $f(x)=-\dfrac{a_0}{a-b}=\dfrac{a_0}{a}\ge 0$ при $a>0$. Пусть $b\ne 2a$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-b<0;\\ b(2a-b)<0;\\ x\ge \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\\ \begin{cases}a-b<0;\\ b(2a-b)>0;\\ x\le \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-b<0;\\ b>0\\ 2a-b<0;\\ x\ge \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\\ \begin{cases}a-b<0;\\ b<0\\ 2a-b>0;\\ x\ge \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\\ \begin{cases}a-b<0;\\ b>0\\ 2a-b>0;\end{cases}\\ \begin{cases}a-b<0;\\ b<0\\ 2a-b<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>a;\\ b>0\\ b>2a;\\ x\ge \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\\ \begin{cases}b>a;\\ b<0\\ b<2a;\\ x\ge \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\\ \begin{cases}b>a;\\ b>0\\ b<2a;\end{cases}\\ \begin{cases}b>a;\\ b<0\\ b>2a;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>0\\ b>2a;\\ x\ge \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\\ a<b<2a;\\ a<b<0.\end{array}\right.$$



Таким образом, при $\left[\begin{array}{l}a<b<2a;\\ a<b<0;\end{array}\right.$ т.е. в областях B и F имеем решение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, x\ge 0;\\ \dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<0.\end{cases}$$

При $\begin{cases}b>0;\\ b>2a;\end{cases}$ т.е. в области N имеем решение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, 0\le x\le \dfrac{-a_0b}{a_1(2a-b)};\\ \dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)}\le x<0;\end{cases}$$

(попытаемся продолжить его далее на всю числовую прямую).

При $x<0, f(x)<0 \quad f(-x)\geq 0$ имеем $f(x)=-\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}$. Очевидно, что $-\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}<0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}>0$. Тогда при $\left[\begin{array}{l}-a<b\leq -2a;\\ -a<b<0;\end{array}\right.$ т.е. в областях D и L имеем решение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, x\geq 0;\\ -\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, x<0.\end{cases}$$

При $\begin{cases}b>0;\\ b>-2a;\end{cases}$ т.е. в области M имеем решение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, 0\leq x<\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};\\ -\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}<x<0;\end{cases}$$

(попытаемся продолжить его далее на всю числовую прямую).

При $x<0, f(x)<0 \quad f(-x)<0$ имеем $f(x)=-\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}$. Очевидно, что $-\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}<0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}>0$. Тогда при $\left[\begin{array}{l}a<b\leq 2a;\\ a<b<0;\end{array}\right.$ т.е. в областях B и F имеем решение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, x\geq 0;\\ -\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<0.\end{cases}$$

При $\begin{cases}b>0;\\ b>2a;\end{cases}$ т.е. в области N имеем решение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, 0\leq x<\dfrac{-a_0b}{a_1(2a-b)};\\ -\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, \dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)}<x<0;\end{cases}$$

(попытаемся продолжить его далее на всю числовую прямую).

Итак, при $b=2|a|$ и $a_0=0$ имеем решение

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{-a}, x\geq 0;\\ 0, x<0.\end{cases} \qquad (21)$$

При $b=2|a|$ и $a_0 \neq 0$ имеем два решения $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{-a}, x\geq 0;\\ \pm\dfrac{a_0}{|a|}, x<0;\end{cases}$ на основе которых можно построить бесконечное множество решений

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{-a}, x\geq 0;\\ h(x)\cdot\dfrac{a_0}{|a|}, x<0;\end{cases} \tag{22}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

В областях D и L существует два решения $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, x\geq 0;\\ \pm\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, x<0;\end{cases}$ на основе которых можно построить бесконечное множество решений вида

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, x\geq 0;\\ h(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, x<0;\end{cases} \tag{23}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

В областях B и F существует два решения $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, x\geq 0;\\ \pm\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<0.\end{cases}$ на основе которых можно построить бесконечное множество решений вида

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, x\geq 0;\\ h(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<0.\end{cases} \tag{24}$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $(-\infty;0)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$.

Теперь рассмотрим в области M решения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, 0\le x\le\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};\\ \pm\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}\le x<0.\end{cases}$$

Необходимо продолжить их на промежуток $x\in\left(-\infty;-\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)}\right)\cup\left(\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};+\infty\right)$. Так как в области *B* есть решение (24) и $B\subset M$, то в области *B* можно построить бесконечное множество решений вида

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, x>\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};\\ \dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, 0\le x\le\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};\\ h(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}\le x<0;\\ g(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{cases} \qquad (25)$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left[\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};0\right)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$; $g(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left(-\infty;\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}\right)$, удовлетворяющая условию $|g(x)|=1$.

Комбинируя в области *B* решения (24) и (25) при $x\in\left[\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)}\right]$, получим бесконечное множество решений еще более общего вида

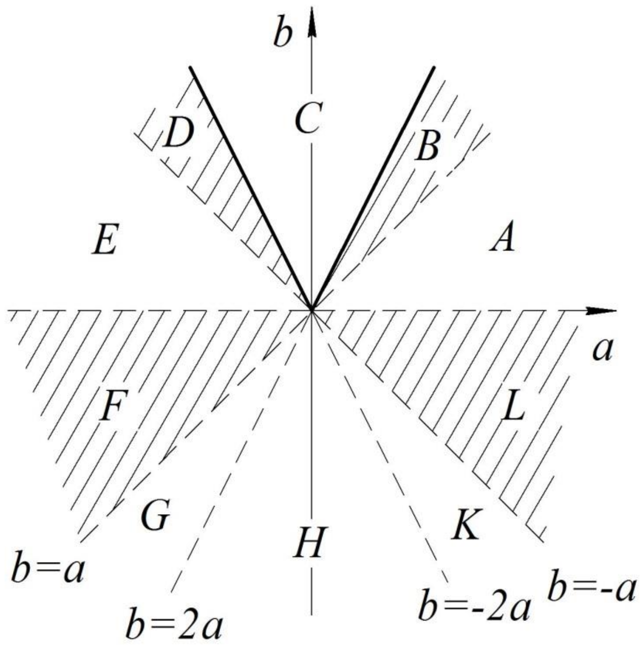
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, x>\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};\\ \dfrac{a_1x+a_0}{a+u(x)\cdot b}, 0\le x\le\dfrac{a_0b}{a_1(2a+b)};\\ h(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a+u(-x)\cdot b)+u(-x)\cdot ba_0}{b(a+u(-x)\cdot b)}, \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}\le x<0;\\ g(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{cases} \qquad (26)$$

где $u(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left[0;\frac{a_0 b}{a_1(2a+b)}\right]$, удовлетворяющая условию $|u(x)|=1$. Заметим, что решение (24) является частным случаем (26), если взять $u(x)=-1$.

Аналогично можно показать, что в области D существует бесконечное множество решений вида

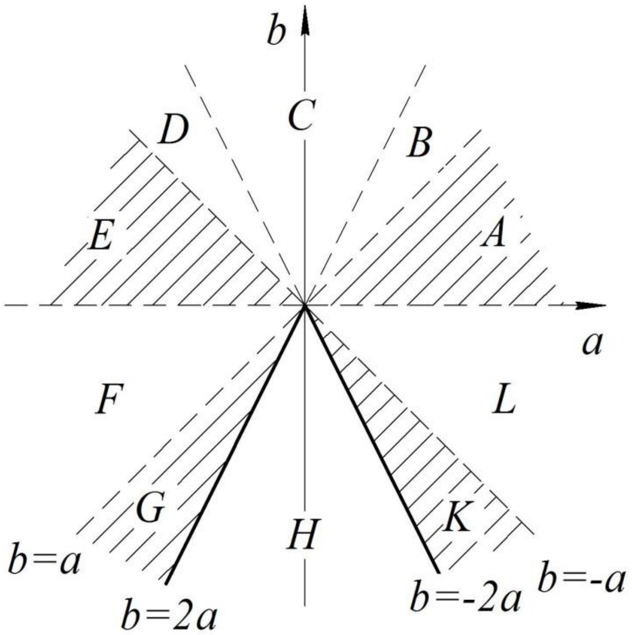
$$f(x)=\begin{cases}\frac{a_1x+a_0}{a+b}, x>\frac{-a_0b}{a_1(2a-b)};\\ \frac{a_1x+a_0}{a+u(x)\cdot b}, 0\le x\le\frac{-a_0b}{a_1(2a-b)};\\ h(x)\cdot\frac{a_1x(2a+u(-x)\cdot b)+u(-x)\cdot ba_0}{b(a+u(-x)\cdot b)}, \frac{a_0b}{a_1(2a-b)}\le x<0;\\ g(x)\cdot\frac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, x<\frac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases} \quad (27)$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left[\frac{a_0 b}{a_1(2a-b)};0\right)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$; $g(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left(-\infty;\frac{a_0 b}{a_1(2a-b)}\right)$, удовлетворяющая условию $|g(x)|=1$, $u(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left[0;\frac{-a_0 b}{a_1(2a-b)}\right]$, удовлетворяющая условию $|u(x)|=1$.



Ответ: при $a_1 > 0, a_0 \ge 0$ уравнение (20) имеет
* бесконечное число решений (23) при $-a < b < 0$ (область *L*); (24) $a < b < 0$ (область *F*); (23) и (27) при $-a < b < -2a$ (область *D*); (24) и (26) при $a < b < 2a$ (область *B*);
* бесконечное число решений (22) при $b = 2|a|,\ a_0 > 0$;
* одно решение (21) при $b = 2|a|,\ a_0 = 0$;
* нет решений при $b > 2|a|,\ b \le -|a|,\ 0 \le b \le |a|$ (области *A, C, E, G, H, K*).

II) Пусть $a_1 < 0, a_0 \le 0$, тогда $\frac{a_0}{a_1} \ge 0$. Исследуя этот случай аналогично I), получим следующий результат.



Ответ: при $a_1 < 0, a_0 \le 0$ уравнение (20) имеет
* бесконечное число решений (23) при $0 < b < -a$ (область *E*); (24) $0 < b < a$ (область *A*); (23) и (27) при $-2a < b < -a$ (область *K*); (24) и (26) при $2a < b < a$ (область *G*);
* бесконечное число решений (22) при $b = -2|a|,\ a_0 < 0$;
* одно решение (21) при $b = -2|a|,\ a_0 = 0$;
* нет решений при $b < -2|a|,\ b \ge |a|,\ -|a| \le b \le 0$ (области *B, C, D, F, H, L*).

III) Пусть $a_1 < 0, a_0 \ge 0$, тогда $\frac{a_0}{a_1} \le 0$.

При $x \ge 0, f(x) \ge 0$ получим

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_1(a+b)>0;\\ x \ge -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\\ \begin{cases}a_1(a+b)<0;\\ x \le -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b<0;\\ x \ge -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\\ \begin{cases}a+b>0;\\ 0 \le x \le -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b<-a;\\ x \ge -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\\ \begin{cases}b>-a;\\ 0 \le x \le -\dfrac{a_0}{a_1}.\end{cases}\end{array}\right.$$

При $x \ge 0, f(x) < 0$ получим

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_1(a-b)>0;\\ x < -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\\ \begin{cases}a_1(a+b)<0;\\ x > -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-b<0;\\ 0 \le x < -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\\ \begin{cases}a-b>0;\\ x > -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>a;\\ 0 \le x < -\dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}\\ \begin{cases}b<a;\\ x > -\dfrac{a_0}{a_1}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким образом, при $x \ge 0$ имеем две функции

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, 0 \le x \le -\dfrac{a_0}{a_1};\\ \dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, x > -\dfrac{a_0}{a_1}.\end{cases} \quad \text{при} \quad -a<b<a;$$

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, 0 \le x \le -\dfrac{a_0}{a_1};\\ \dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, x > -\dfrac{a_0}{a_1}.\end{cases} \quad \text{при} \quad a<b<-a.$$

В области $-a<b<a$ имеем $a+b>0$, $a-b>0$, $a>0$, $2a+b>0$, $2a-b>0$.

При $x<0, f(x) \ge 0$ $f(-x) \ge 0$ имеем $f(x) = \dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>0;\\ x \le \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{cases}\\ \begin{cases}b<0;\\ x \ge \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b>0;\\ \begin{cases}b<0;\\ \dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)} \le x < 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

Так как $0<b<a$, то $\dfrac{a}{b}>1$, следовательно $\dfrac{2a+b}{b} = 2\dfrac{a}{b}+1>3$. Значит

$\frac{a_0}{a_1} < \frac{-a_0 b}{a_1(2a+b)} < 0$. Вторая система не подходит, так как нет решений при $x \in \left(\frac{a_0}{a_1};0\right)$.

При $x<0, f(x)\geq 0 \;\; f(-x)<0$ имеем $f(x)=\frac{a_1 x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b>0; \\ x \leq \dfrac{a_0 b}{a_1(2a-b)}; \end{cases} \\ \begin{cases} b<0; \\ x \geq \dfrac{a_0 b}{a_1(2a-b)}; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} b>0; \\ x \leq \dfrac{a_0 b}{a_1(2a-b)}<0; \end{cases}$$

Так как $0<b<a$, то $\frac{a}{b}>1$, следовательно $\frac{2a-b}{b}=2\frac{a}{b}-1>1$. Значит $\frac{a_0}{a_1}<\frac{a_0 b}{a_1(2a-b)}<0$.

При $x<0, f(x)<0$ условия существования функций такие же как и для $f(x)\geq 0$. Таким образом, в области $0<b<a$ получили решения

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a_1 x + a_0}{a-b}, x>-\dfrac{a_0}{a_1}; \\ \dfrac{a_1 x + a_0}{a+b}, 0\leq x\leq -\dfrac{a_0}{a_1}; \\ \pm\dfrac{a_1 x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, \dfrac{a_0}{a_1}\leq x<0; \\ \pm\dfrac{a_1 x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases}$$

на основе которых можно построить бесконечное множество решений

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a_1 x + a_0}{a-b}, x>-\dfrac{a_0}{a_1}; \\ \dfrac{a_1 x + a_0}{a+b}, 0\leq x\leq -\dfrac{a_0}{a_1}; \\ h(x)\cdot\dfrac{a_1 x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, \dfrac{a_0}{a_1}\leq x<0; \\ g(x)\cdot\dfrac{a_1 x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, x<\dfrac{a_0}{a_1}; \end{cases} \qquad (28)$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left[\frac{a_0}{a_1};0\right)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$; $g(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left(-\infty;\frac{a_0}{a_1}\right)$, удовлетворяющая условию $|g(x)|=1$.

В области $a<b<-a$ имеем $a+b<0$, $a-b<0$, $a<0$, $2a+b<0$, $2a-b<0$.

При $x<0, f(x)\geq 0$ $f(-x)\geq 0$ имеем $f(x)=\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>0;\\ x\leq\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{cases}\\ \begin{cases}b<0;\\ x\geq\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}b>0;\\ x\leq\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}<0;\end{cases}$$

Так как $0<b<-a$, то $\dfrac{-a}{b}>1$, следовательно $\dfrac{-(2a+b)}{b}=2\dfrac{-a}{b}-1>1$. Значит $\dfrac{a_0}{a_1}<\dfrac{-a_0b}{a_1(2a+b)}<0$.

При $x<0, f(x)\geq 0$ $f(-x)<0$ имеем $f(x)=\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>0;\\ x\leq\dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\\ \begin{cases}b<0;\\ x\geq\dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b>0;\\ \begin{cases}b<0;\\ \dfrac{a_0}{a_1}<\dfrac{a_0b}{a_1(2a-b)}\leq x<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Вторая система не подходит, так как нет решений при $x\in\left(\frac{a_0}{a_1};0\right)$.

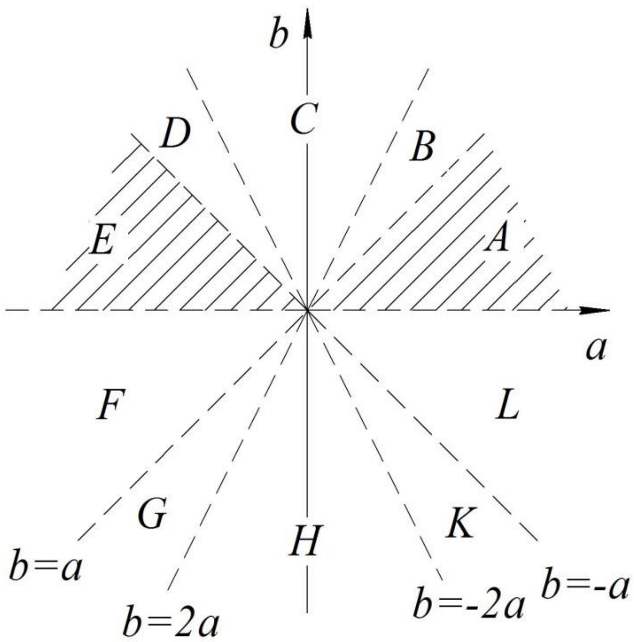
При $x<0, f(x)<0$ условия существования функций такие же как и для $f(x)\geq 0$. Таким образом, в области $0<b<-a$ получили решения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, x\ge -\dfrac{a_0}{a_1};\\ \dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, 0\le x< -\dfrac{a_0}{a_1};\\ \pm\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, \dfrac{a_0}{a_1}<x<0;\\ \pm\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, x\le \dfrac{a_0}{a_1};\end{cases}$$

на основе которых можно построить бесконечное множество решений

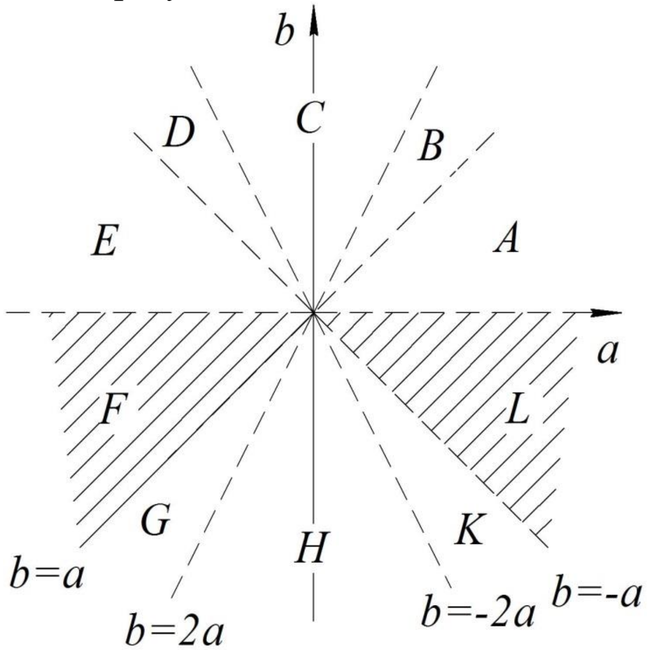
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_1x+a_0}{a+b}, x\ge -\dfrac{a_0}{a_1};\\ \dfrac{a_1x+a_0}{a-b}, 0\le x< -\dfrac{a_0}{a_1};\\ h(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a-b)-ba_0}{b(a-b)}, \dfrac{a_0}{a_1}<x<0;\\ g(x)\cdot\dfrac{a_1x(2a+b)+ba_0}{b(a+b)}, x\le \dfrac{a_0}{a_1};\end{cases} \qquad (29)$$

где $h(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left(\dfrac{a_0}{a_1};0\right)$, удовлетворяющая условию $|h(x)|=1$; $g(x)$ – произвольная функция, заданная на множестве $\left(-\infty;\dfrac{a_0}{a_1}\right]$, удовлетворяющая условию $|g(x)|=1$.



Ответ: при $a_1 < 0, a_0 \ge 0$ уравнение (20) имеет
* бесконечное число решений (28) при $0 < b < a$ (область *A*); (29) $0 < b < -a$ (область *E*);
* нет решений при $b \le 0$, $b \ge |a|$ (области *B, C, D, F, G, H, K, L*).

IV) Пусть $a_1 > 0, a_0 \le 0$, тогда $\frac{a_0}{a_1} \le 0$. Исследуя этот случай аналогично III), получим следующий результат.



Ответ: при $a_1 > 0, a_0 \le 0$ уравнение (20) имеет
* бесконечное число решений (28) при $a < b < 0$ (область *F*); (29) $-a < b < 0$ (область *L*);
* нет решений при $b \le 0$, $b \ge |a|$ (области *A, B, C, D, E, G, H, K*).

Заключение

Поставленная на XXI Республиканском турнире юных математиков задача решена полностью. Найдены все решения предложенных функциональных уравнений или доказано их отсутствие. Исследовано количество решений в зависимости от параметров уравнения. На рисунках наглядно представлены области, где решения существуют (заштрихованы) и где нет. В дальнейшем работу над данной темой можно продолжить, например, исследовать уравнение вида (5), в левой части которого квадратный трехчлен, а также исследовать свойства полученных решений: непрерывность, монотонность, построить их графики.

Список использованных источников

1. http://www.uni.bsu.by/arrangements/turnir/rtum21_2019/zadan_rtum21.doc