ОТДЕЛ ОБРАЗОВАНИЯ, СПОРТА И ТУРИЗМА АДМИНИСТРАЦИИ ЛЕНИНСКОГО
РАЙОНА Г. ГРОДНО
ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГИМНАЗИЯ № 2 Г. ГРОДНО»

Секция «Математика»

РЕШЕНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ЗАДАЧИ «ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДРОБЕЙ»

Автор:
Новицкая Алина Руслановна,
ученица 5 «Б» класса

Руководитель:
Кемежук Елена Валерьевна,
учитель математики

Гродно 2020

Оглавление

Введение

Исследовательская задача «Исследование расположения дробей» была предложена для решения школьникам в «VII Минском открытом городском турнире юных математиков 2020 г.». Она заинтересовала меня тем, что в программе изучения предмета «Математика» в 5 классе мы имеем дело с дробями. Также исследовательская работа развивает умение анализировать, рассуждать и обобщать данные. Решая данную задачу, можно в полной мере проявить свои способности к творческому мышлению.

Постановка задачи:

1. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых однозначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$?

2. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$? А $\frac{4}{7}$?

3. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{87}{38}$ и $\frac{88}{39}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

4. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{68}{21}$ и $\frac{76}{23}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

5. Найдите наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее следующему условию: для любого целого числа m, где $0<m<2019$, существует целое число k такое, что $\frac{m}{2019}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2020}$.[1]

6. Предложите алгоритм нахождения обыкновенных правильных несократимых и последовательно расположенных дробей знаменатели которых n-значные числа между которыми находится число $\frac{m}{k}$.

Объект исследования: обыкновенные дроби.

Предмет исследования: разработка алгоритма сравнения дробей при конкретно заданных условиях задачи.

Цель работы: развивать умение анализа и обобщения результатов, полученных в ходе исследования.

Основная часть

1. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых однозначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$?

Для определения между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$ рассмотрим все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых однозначные числа и приведем их в таблице 1. В строках и столбцах указаны дроби с одинаковыми числителями и знаменателями по возрастанию.

Таблица 1 Правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых однозначные числа

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{9}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{3}$	
	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{7}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$		
$\frac{4}{9}$		$\frac{4}{7}$		$\frac{4}{5}$			
$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{6}$				
		$\frac{6}{7}$					
$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{8}$						
$\frac{8}{9}$							

Пользуясь правилом сравнения дробей, расположим по возрастанию все дроби до $\frac{1}{2}$, так как $\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$. В результате получаем:

$\frac{1}{9};\ \frac{1}{8};\frac{1}{7};\frac{1}{6};\ \frac{1}{5};\frac{2}{9};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{7};\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{8};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{7};\ \frac{1}{2}.$

Анализируя данный ряд, можно заметить, две закономерности:

1. Каждая дробь, расположенная между двумя другими представляет собой сумму числителей, записанную в числитель, и сумму знаменателей этих дробей, записанную в знаменатель.

Например: $\frac{1}{8}=\frac{1+1}{9+7}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$;

$\frac{1}{7}=\frac{1+1}{8+6}=\frac{1}{7}$.

2. Разность произведения знаменателя меньшей дроби и числителя последующей с произведением числителя меньшей из дробей со знаменателем последующей равна единице.

Например: $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{8}$ $\quad 1\cdot 9-1\cdot 8=1$

$\frac{3}{8}$; $\frac{2}{5}$ $\quad 2\cdot 8-3\cdot 5=1$

Запишем выведенные формулы в общем виде.

$$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+n}<\frac{m}{n} \tag{1}$$

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \quad bc-ad=1 \tag{2}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что для решения данной задачи нет необходимости располагать в порядке возрастания все дроби.

Будем рассматривать $\frac{3}{7}$ как дробь с суммой натуральных чисел в числителе и знаменателе:

$\frac{3}{7}=\frac{1+2}{6+1}=\frac{1+2}{5+2}=\frac{1+2}{4+3}=\frac{1+2}{3+4}=\frac{1+2}{2+5}=\frac{1+2}{1+6}$.

Согласно условию задачи подходящими являются 2 пары дробей:

1) $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$;

2) $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{2}$

Сравнив их с дробью $\frac{3}{7}$, выбираем ближе расположенную пару, т. е. из пары чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{5}$ большее число ($\frac{2}{5}>\frac{1}{4}$), а из пары $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ меньшее ($\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$).

Таким образом, получаем, что $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$.

2. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между

какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$?

А $\frac{4}{7}$?

Если знаменатели дробей – двузначные числа, то очевидно, что сумма таких знаменателей <200. Таким образом, самое большое из чисел, входящих в данный промежуток, которое будет делится на 7 без остатка это 196.

Таким образом, воспользовавшись основным свойством дроби, получим: $\frac{3}{7}=\frac{84}{196}$.

Далее, чтобы определить между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$, наша задача из дробей меньших $\frac{84}{196}$ выбрать наибольшую, а из дробей больших $\frac{84}{196}$ наименьшую. При этом сумма числителей равна 84, а сумма знаменателей 196.

Способом подбора с использованием ранее выведенных формул (1) и (2) получаем подходящую пару дробей: $\frac{44}{103}$ и $\frac{40}{93}$.

Ответ: $\frac{44}{103}<\frac{3}{7}<\frac{40}{93}$.

Определим между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{4}{7}$.

Воспользовавшись основным свойством дроби, получим: $\frac{4}{7}=\frac{112}{196}$

Далее, чтобы определить между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{4}{7}$, из дробей меньших $\frac{112}{196}$ выбираем наибольшую, а из дробей больших $\frac{112}{196}$ наименьшую. При этом сумма числителей равна 112, а сумма знаменателей 196.

Способом подбора получаем подходящую пару дробей: $\frac{57}{100}$ и $\frac{55}{96}$.

Ответ: $\frac{57}{100}<\frac{4}{7}<\frac{55}{96}$.

3. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{87}{38}$ и $\frac{88}{39}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

Будем рассматривать неправильные дроби в виде смешанных чисел $\frac{87}{38}=2\frac{11}{38}$; $\frac{88}{39}=2\frac{10}{39}$.

Приведем дробные части к наименьшему общему числителю равному 110. Получим: $2\frac{110}{380}$ и $2\frac{110}{429}$. Таким образом, наша задача найти дробь числитель и знаменатель которой имеют наибольший из возможных общих делителей, при этом данная дробь должна быть больше, чем $2\frac{110}{429}$ и меньше, чем $2\frac{110}{380}$.

Делители числа 110: 110, 55, 11, 10, 5, 2, 1.

НОД(110; 385)=55

$2\frac{110}{429}<2\frac{110}{385}<2\frac{110}{380}$

$2\frac{110}{385}=2\frac{2}{7}$.

Ответ: $2\frac{2}{7}$.

4. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{68}{21}$ и $\frac{76}{23}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

Будем рассматривать неправильные дроби в виде смешанных чисел $\frac{68}{21}=3\frac{5}{21}$; $\frac{76}{23}=3\frac{7}{23}$

Приведем дроби к наименьшему общему числителю равному 35. Получим $3\frac{35}{147}$ и $3\frac{35}{115}$.

Таким образом, необходимо найти дробь числитель и знаменатель которой имеют наибольший из возможных общих делителей, при этом данная дробь должна быть больше, чем $3\frac{35}{147}$ и меньше, чем $3\frac{35}{115}$.

Делители 35: 35, 7, 5, 1.

НОД (35; 140)=35.

$3\frac{35}{147}<3\frac{1}{4}<3\frac{35}{115}$

Ответ: $3\frac{1}{4}$.

5. Найдите наименьшее натуральное число *n*, удовлетворяющее следующему условию: для любого целого числа m, где 0<*m*<2019, существует целое число *k* такое, что $\frac{m}{2019}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2020}$.

Используя (1), получаем $\frac{k}{n}=\frac{m+m+1}{4039}=\frac{2m+1}{4039}$.

Ответ: 4039.

6. Предложите алгоритм нахождения обыкновенных правильных несократимых и последовательно расположенных дробей знаменатели которых n-значные числа между которыми находится число $\frac{m}{k}$.

Пусть $\frac{a}{b}<\frac{m}{k}<\frac{c}{d}$. Тогда получим

$$bm-ak=1 \text{ и } kc-md=1 \quad (3)$$

Если знаменатели дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – n-значные числа, то сумма таких знаменателей меньше $2\cdot 10^n$. Таким образом, необходимо определить большее из чисел, входящих в данный промежуток, которое будет делится на k без остатка. Пусть результат деления равен z.

Воспользовавшись основным свойством дроби, получим:

$\frac{m}{k}=\frac{mz}{kz}$, где kz – n-значное число.

Далее, чтобы определить между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{m}{k}$, наша задача из дробей меньших $\frac{mz}{kz}$ выбрать наибольшую, а из дробей больших $\frac{mz}{kz}$ наименьшую.

$$a+c=mz \text{ и } b+d=kz \quad (4)$$

Способом подбора с использованием формул (3) и (4) получаем подходящую пару дробей.

Заключение

Полностью решены все пункты задачи, поставленной на VII Минском городском открытом турнире юных математиков.

1. Найдено между какими двумя последовательно расположенными дробями знаменатели которых однозначные числа находится число $\frac{3}{7}$.

2. Найдено между какими двумя последовательно расположенными дробями знаменатели которых двузначные числа находятся числа $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$.

3. Найдена обыкновенная дробь с наименьшим положительным знаменателем, расположенная между числами $\frac{87}{38}$ и $\frac{88}{39}$.

4. Найдена обыкновенная дробь с наименьшим положительным знаменателем, расположенная между числами $\frac{68}{21}$ и $\frac{76}{23}$.

5. Найдено наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее следующему условию: для любого целого числа m, где $0<m<2019$, существует целое число k такое, что $\frac{m}{2019}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2020}$.

6. Предложен алгоритм нахождения обыкновенных правильных несократимых и последовательно расположенных дробей знаменатели которых n-значные числа между которыми находится число $\frac{m}{k}$.

Практическое значение результатов предполагает использование их на факультативных занятиях по математике, математических олимпиадах, конкурсах и турнирах с целью развития творческих способностей учащихся.

Список использованных источников

1. Задания VII Минского городского открытого турнира юных математиков – 2020 младшая лига, 5-7 классы Электронный ресурс - сайт www.uni.bsu.by