X РЕСПУБЛИКАНСКАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ-КОНКУРС НАУЧНЫХ РАБОТ УЧАЩИХСЯ СРЕДНИХ, СРЕДНЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ И СТУДЕНТОВ ВУЗОВ «ОТ АЛЬФА К ОМЕГЕ…»

ДОКЛАД НА ТЕМУ

«ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА»

Учащиеся 10 «А» класса
ГУО «Вороновская средняя школа»
Петросян Карине Гайковна
тел. 80444532363,
231391, г.п. Вороново, пер. Советский 14

Научный руководитель-учитель ГУО «Вороновская средняя школа»
Магистр математики
Петросян Гайк Бетлемович
Тел. 80293974745, hajk.betlemovich@yandex.ru

2020г

Введение

В 2018 году во время исследования задачи «Медианы многоугольников» предложенной в «Областном турнире юных математиков» мы нашли и доказали алгоритм нахождения центра тяжести произвольного выпуклого многоугольника.

Нахождение центра тяжести выпуклого многоугольника имеет большое значение не только при решении задач математического и физического содержания, но и при решении задач практической направленности.

Мы пробовали найти в разных источниках, в том числе и в интернете, простой алгоритм нахождения центра тяжести многоугольника, но математического подхода так и не нашли.

Физики экспериментально находят центр тяжести с помощью отвеса.

В разных источниках есть разные подходы для решения этого вопроса, но они для школьников непонятные и довольно сложные.

Наш метод, очень простой и надеемся что практически любой школьник его поймёт и сможет при необходимости его применять.

Исторический экскурс

Первым открытием Архимеда в механике было введение понятия центра тяжести, т.е. доказательство того, что в любом теле есть единственная точка, в которой можно сосредоточить его вес, не нарушив равновесного состояния.

Герон и Папп приводят со ссылкой на Архимеда доказательство существования центра тяжести.

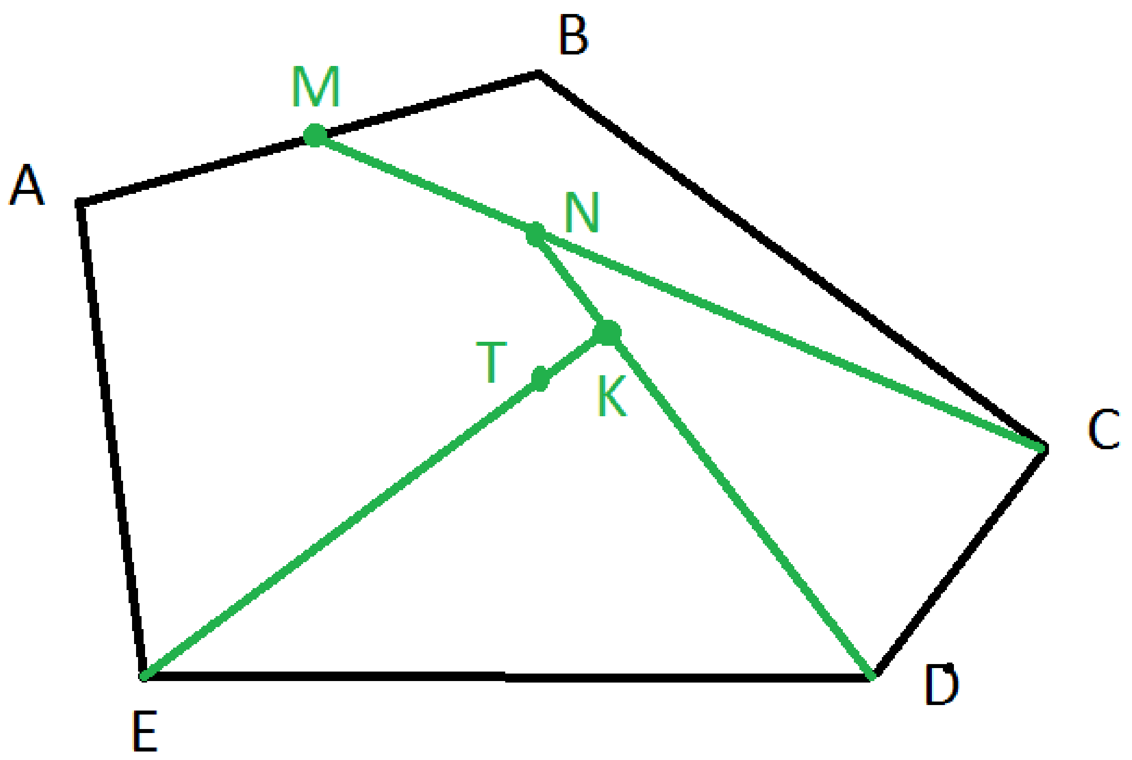
Герон пишет: «Никто не отрицает, что о наклонении и отклонении в действительности говорят только о телах. Если же мы говорим о плоских или телесных (объемных) фигурах, что некоторая точка является их центром поворота и центром тяжести, то это достаточно разъяснено Архимедом». Эта фраза подтверждает, что замена тел их теоретическими моделями была в науке новшеством, введенным Архимедом.

Определение центра тяжести и теорему о его существовании Архимеда приводится в пересказе Паппа.

Определение центра тяжести формулируется так: «...центром тяжести некоторого тела является некоторая расположенная внутри него точка, обладающая тем свойством, что если за нее мысленно подвесить тяжелое тело, то оно останется в покое и сохранит первоначальное положение».[1]

Нахождения центра тяжести произвольного пятиугольника

В самом начале хотим на примере показать и демонстрировать суть нашего метода. Пока что не будем обосновывать наши действия, просто про них расскажем и покажем результат. На самом деле он настолько прост, что надеемся, всем будет понятно.
Пусть ABCDE произвольный выпуклый пятиугольник.

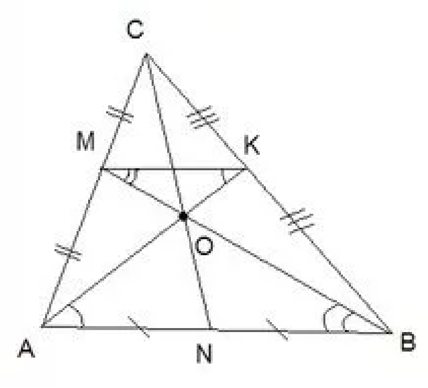


- На стороне AB возьмём точку M так, чтобы AM=MB. M центр тяжести отрезка AB.
- На отрезке CM возьмём точку N так, чтобы $CN = 2MN$. N центр тяжести треугольника ABC.
- На отрезке DN возьмём точку K так, чтобы $DK = 3KN$. K центр тяжести четырехугольника ABCD.
- На отрезке EK возьмём точку T так, чтобы $ET = 4TK$. T центр тяжести пятиугольника ABCDE.

Сейчас попробуем демонстрировать вышесказанное на практике, потом дать всему этому теоретическое обоснование.

Заранее изготовленный пятиугольник горизонтально располагаем на острый предмет, на пример иголку или карандаш и убеждаемся, что центр тяжести найден правильно, многоугольник находиться в равновесии.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC.



Допустим, на каждой вершине треугольника расположены одинаковые массы, например по 1кг. Очевидно, что N является центром тяжести отрезка AB. В дальнейшем можем рассмотреть точку C, массой 1кг, и точку N, массой 2кг. По правилу рычага центр тяжести для отрезка CN будет точка O, при этом OC=2ON. Этого уже достаточно, чтобы утверждать, что центр тяжести треугольника лежит на его медиане и делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Учитывая единственность центра тяжести, получаем теорему о медианах: медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

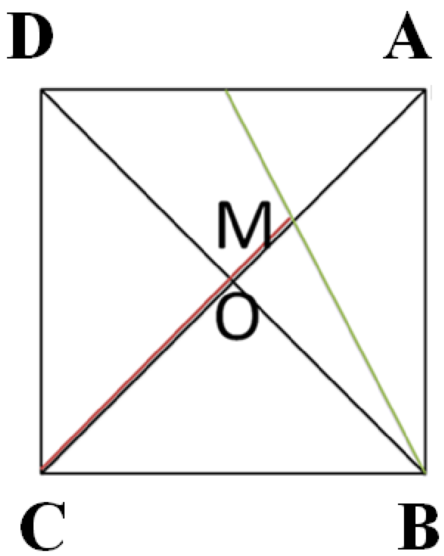
Сейчас рассмотрим четырехугольники.

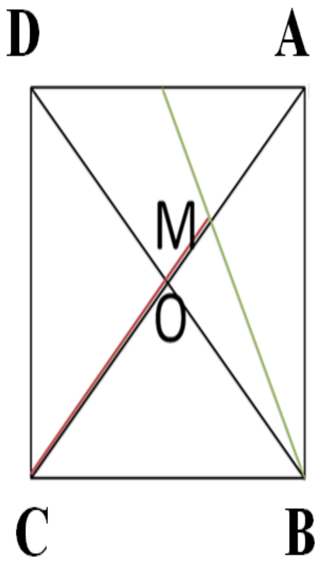
<u>**Определение:**</u> Медианой четырёхугольника назовем отрезок, соединяющий какую-нибудь из его вершин с центром медиан треугольника, вершинами которого будут служить остальные три вершины четырёхугольника.

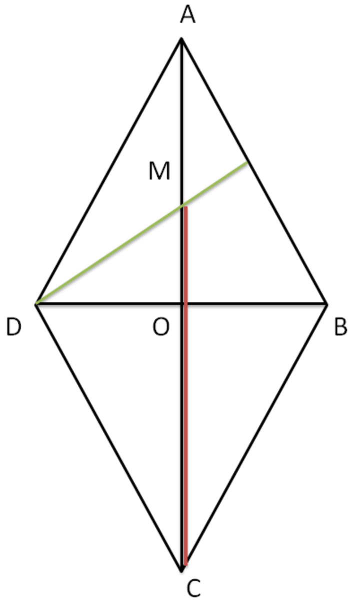
<u>**Утверждение 1:**</u> **Все четыре медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в соотношении 3:1 (считая от вершины).**

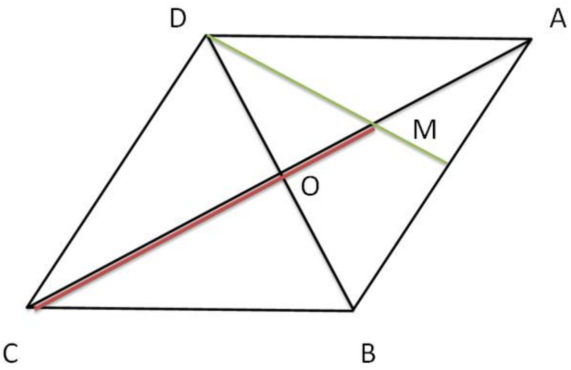
Доказательство:

Рассмотрим стандартные четырёхугольники (квадрат, прямоугольник, ромб, параллелограмм).









Для квадрата, прямоугольника, ромба и параллелограмма всё просто.

Медиана четырёхугольника CM проходит через середину BD (BO=OD).

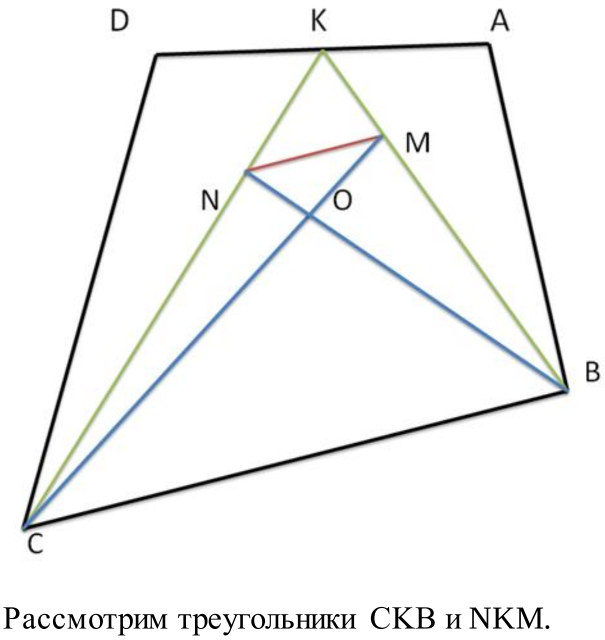
Точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABD, следовательно, отрезок OA точкой M делиться в отношении 2:1 считая от вершины треугольника A. Так как диагонали всех указанных фигур точкой пересечения делятся пополам, то OC=OA. Получаем, что $OC = OA = 3 \cdot OM$.

Осталось только заметить, что для указанных фигур медианы пересекутся именно в точке O.

Рассмотрим сейчас произвольный четырёхугольник ABCD.

Пусть M пункт пересечения медиан треугольника ABD , а N – пункт пересечения медиан треугольника ACD.

Тогда CM и BN медианы четырёхугольника ABCD .



Рассмотрим треугольники CKB и NKM.

У них угол K – общий. Так как M и N являются точками пересечения медиан в треугольниках ABD и ACD соответственно, то $\frac{KM}{MB} = \frac{KN}{NC} = \frac{1}{2}$ и $\frac{KM}{KB} = \frac{KN}{KC} = \frac{1}{3}$.

Получается что треугольники CKB и NKM подобны с коэффициентом подобия 3. Следовательно, BC=3NM и BC параллельна MN .

Сейчас рассмотрим треугольники MON и COB. Так как BC параллельна MN и BC=3NM, то треугольники MON и COB подобны с коэффициентом подобия 3.

Следовательно, CO=3OM; BO=3ON.

Очевидно, что если рассмотреть медианы, выходящие из остальных вершин, то получим аналогичные результаты.

Тем самым получаем, все четыре медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в соотношении 3:1 (считая от вершины).

ЧТД.

<u>Утверждение 2:</u> точка пересечения медиан является центром тяжести четырёхугольника.

Доказательство:

1 способ:

Вырежем из однородного материала, например из картона, произвольный четырехугольник. Сделаем необходимые построения и найдём точку пересечения медиан четырёхугольника O.

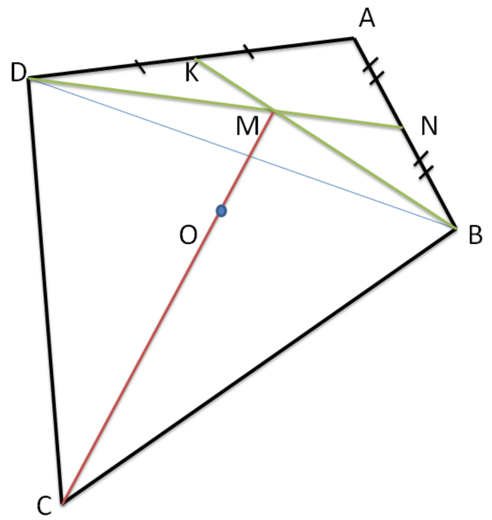
Проверим, держится ли данный четырёхугольник в равновесии, если расположить его на иголке, т.е. иголку приставить к точке O.

Оказывается, да.

Вывод: С помощью эксперимента мы доказали, что пункт пересечения медиан в четырёхугольнике является центром тяжести.

2 способ:

Если подойти к этому вопросу со стороны «Геометрии масс», то получим следующую картину.



Рассмотрим произвольный четырёхугольник ABCD. Предположим, на вершинах находятся одинаковые массы, например по 1кг.

Тогда центр тяжести отрезка AB будет его середина, точка N.

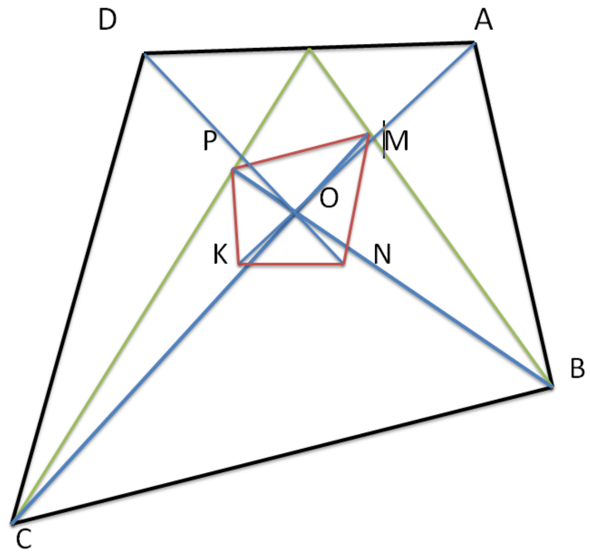
В дальнейшем можем предположить, что с точек A и B массы концентрировались в точке N, т.е. в точках A и B массы стали нулями, а в точке N уже 2 кг.

Сейчас рассмотрим отрезок DN. В точке D масса 1 кг, а в точке N – 2 кг. Центр тяжести отрезка DN, следовательно, и треугольника ABD, будет являться точка M, геометрическое место которой определяется исходя из масс расположенных на концах отрезка, т.е. так-как в точке D масса 1 кг, а в точке N – 2 кг, то DM=2MN.

Полученный результат не зависит от выбора стороны, т.е. мы могли начинать наши рассуждения, начиная не с отрезка AB, а например с AD или с BD. Тем самым, мы с помощью геометрии масс доказали, что центр тяжести треугольника это точка пересечения медиан - М.

Сейчас рассмотрим отрезок СМ. Масса в точке С 1кг, а в точке М 3кг. Следовательно, центр тяжести отрезка СМ, а значит и четырёхугольника ABCD, является точка О, которая делит отрезок СМ в отношении 3 к 1 считая от вершины С.

Заметим, что тут также результат не зависит от выбора соответственных сторон и треугольников.



3 способ:

Рассмотрим одновременно четырёхугольники ABCD и MNKP, где точки M;N; K и P являются соответственно центрами тяжести треугольников ABD; ABC; BCD и ACD.

Их медианы пересекутся в одной точке О. В дальнейшем можем рассмотреть MNKP вместе с четырёхугольником, вершинами которого являются центры тяжести соответственных треугольников MNK; NKP; KPM; PMN.

Заметим, что продолжая этот процесс мы каждый раз уменьшаем размеры четырёхугольника в 3 раза , а точка О остаётся неизменной.

Суть такого построения в следующем. Каждый раз уменьшаем размеры четырёхугольника в 3 раза, при том полученные четырёхугольники подобны, т.е. пропорция сторон и равенство углов соблюдаются. Значит, можем констатировать, что каждый раз уменьшается площадь в 9 раз и увеличивается плотность в 9 раз . Получаем убывающую геометрическую прогрессию.

В итоге вся масса четырёхугольника концентрируется в точке О.

Это означает, что точка О является центром тяжести исходного четырёхугольника ABCD.

ЧТД.

Замечание: С помощью данного построения мы получаем гомотетию[2, с.355] с коэффициентом -3. Каждый раз полученный четырёхугольник будет подобный предыдущему, но стороны будут ровно в 3 раза меньше. При том ориентация вершин каждый раз будет меняться.

Сейчас рассмотрим произвольный многоугольник.

Определение: Медианой n-угольника назовем отрезок, соединяющий какую-нибудь из его вершин с точкой пересечения медиан многоугольника, вершинами которого будут служить остальные вершины n-угольника.

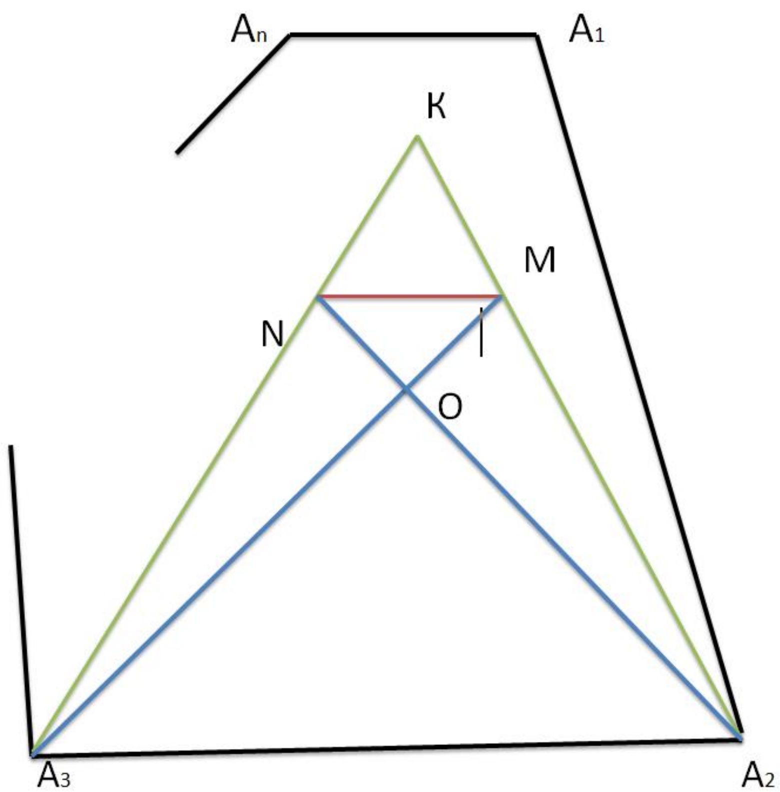
<u>Утверждение 3:</u> Все медианы n-угольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в соотношении (n-1):1 (считая от вершины).

Доказательство: Попробуем доказать данный факт с помощью математической индукции.

Для n=3 это известная теорема о медианах.

(Мало того, для n=4 мы уже доказывали в пункте 1, при том оно следовало, из теоремы о медианах, т.е. из случая n=3.)

Допустим, что это утверждение верно для k=n-1 и докажем, что для k=n также будет верно.



Пусть K является пунктом пересечения медиан (n-2)-угольника без вершин A_2 и A_3 , т.е. $A_1A_4 \ldots A_n$.

A_3M; A_2N медианы (n-1)-угольников $A_1A_2A_4 \ldots A_n$ и $A_1A_3A_4 \ldots A_n$ соответственно.

Так-как M и N являются точками пересечения медиан в (n-1)-угольниках $A_1A_2A_4 \ldots A_n$ и $A_1A_3A_4 \ldots A_n$ соответственно, то

$\frac{KM}{MA_2} = \frac{KN}{NA_3} = \frac{1}{n-2}$ и $\frac{KM}{KA_2} = \frac{KN}{KA_3} = \frac{1}{n-1}$.

Рассмотрим треугольники A_3KA_2 и NKM. У них угол K общий и стороны пропорциональны $\frac{KM}{KA_2} = \frac{KN}{KA_3} = \frac{1}{n-1}$.

Получается что треугольники A_3KA_2 и NKM подобны с коэффициентом подобия n-1.

Следовательно, A_2A_3=(n-1)NM и A_2A_3 параллельна MN .

Сейчас рассмотрим треугольники MON и A_2OA_3. Так как A_2A_3 параллельна MN и A_2A_3=(n-1)NM, то треугольники MON и A_2OA_3 подобны с коэффициентом подобия n-1.

Следовательно, A_3O=(n-1)OM; A_2O=(n-1)ON.

Очевидно, что если рассмотреть медианы выходящие из остальных вершин, то получим аналогичные результаты.

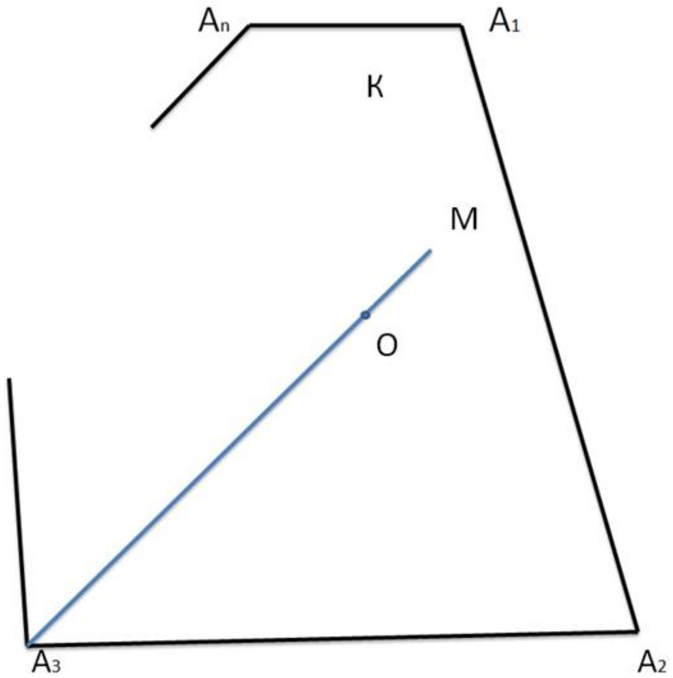
Тем самым получаем, что все медианы n-угольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в соотношении (n-1):1 (считая от вершины).

ЧТД.

<u>Утверждение 4:</u> Точка пересечения медиан n-угольника является центром тяжести n-угольника.

Ограничимся тут одним способом доказательства.

Если подойти к этому вопросу со стороны «Геометрии масс», то получим следующую картину.



Масса в точке M будет (n-1) кг, а масса точки A_3 1 кг. Значит, центр тяжести отрезка A_3M, а следовательно и n-угольника, является точка O, которая делит отрезок A_3M в отношении (n-1) к 1 считая от вершины A_3. (Мы уже доказали, что все медианы n-угольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в соотношении (n-1):1 (считая от вершины)).

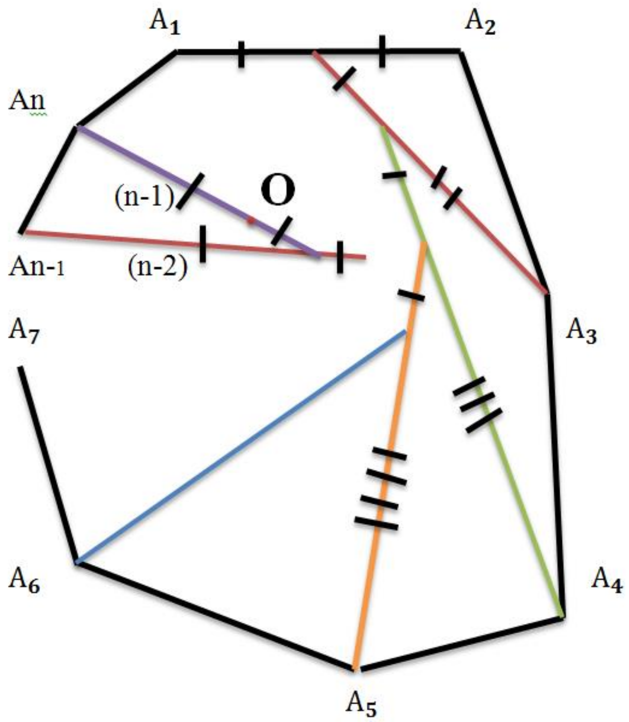
ЧТД.

Заключение:

Исходя из утверждения 4, мы решили предложить алгоритм построения центра тяжести произвольного выпуклого многоугольника:

Рассмотрим n-угольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Середину отрезка A_1A_2 соединим с вершиной A_3. Полученный отрезок поделим в отношении 2:1 считая от вершины A_3. Эту точку соединим с вершиной A_4 и полученный отрезок поделим в отношении 3:1 считая от вершины A_4 и т.д.

В итоге, после построения n-2 отрезков, получим центр тяжести n-угольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – точку O.



Резюме

Во введении указан объект исследования - алгоритм нахождения центра тяжести произвольного выпуклого многоугольника.

Целью исследования является найти математический метод нахождения центра тяжести произвольного выпуклого многоугольника.

В начале основной части на простом, доступном школьникам среднего звена, языке на примере пятиугольника показано и демонстрировано суть нашего метода.

Отдельно рассмотрены треугольники и четырёхугольники. Для четырёхугольников дано определение медианы и доказано, что медианы четырёхугольника пересекаться в одной точке, которая является центром тяжести четырёхугольника.

Доказательство приведено тремя способами: экспериментально, с помощью геометрии масс и с помощью гомотетии.

Дано определение медианы n-угольника и с помощью математической индукции доказано, что медианы многоугольника пересекаться в одной точке, которая является центром тяжести четырёхугольника.

В заключении предложено алгоритм построения центра тяжести произвольного выпуклого многоугольника.

Полученный нами метод, очень простой и практически любой школьник при желании его поймёт и сможет при необходимости его применять.

Ключевые слова: центр тяжести, медианы n-угольника, произвольный выпуклый многоугольник.

Список литературы:

1. https://studfiles.net/preview/2146357/page:2/
2. Латотин, Л.А. Математика: учеб. Пособие для 9-го кл./Л.А. Латотин, Б.Д. Чебаотаревский,Мн. :Нар. Асвета, 2006
3. Балк, М. Б. Геометрия масс/ М.Б. Балк.–М., 1987.