ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГИМНАЗИЯ №3 Г. ГРОДНО»

Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

«Размерность Хаусдорфа подмножества множества цепных дробей»

Автор работы:

Погосян Миланна Армановна, 9 класс
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»,

Руководители работы:

Разумов Евгений Владимирович, учитель математики, магистр педагогических наук,
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»

Корлюкова Ирина Александровна, декан факультета довузовской подготовки, кандидат физ.-мат. наук,
ГрГУ им. Я. Купалы

г. Гродно, 2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Множество возникает путем объединения отдельных предметов в одно целое. Оно есть множественность, мыслимая как единство. Однако возникает вопрос, как сравнивать между собой множества. Множества чисел могут быть сравниваемы друг с другом с различных точек зрения и с помощью различных характеристик. Можно ставить вопрос об их мощности, об их мере, и ряде других измерителей. Наиболее интересной как по своим методам, так и по своим результатам оказалось метрическая проблематика, изучающая меру числовых множеств, задаваемых теми или иными свойствами входящих в них чисел [1].

Понятие меры оказалось полезным и удобным концептом в теоретической физике. Мера стала реальным инструментом получения и анализа решений задач стохастической динамики, в частности, проблемы турбулентности. Также она нашла применение в широком круге научно-технических задач: исследовании белковых структур, пористых тел, создании фильтров, изучении легированных полупроводников, при борьбе с эпидемиями.

В математических и физических исследованиях используется большое количество размерностей (также для критических показателей физических величин, описывающих процессы и явления, как правило, можно указать множество, с размерностью которого этот показатель связан), и в конкретном исследовании всегда встаёт вопрос выбора наиболее удобной размерности, который обусловлен содержанием задачи [2].

Конечные числовые множества можно сравнивать по количеству элементов (мощности), бесконечные множества могут быть счетными и несчетными. Однако остается открытым вопрос, как отличать между собой бесконечные счетные множества или бесконечные несчетные множества. Для этого используют, например, меру Лебега, мера Кантора, размерность Минковского, меру Хаусдорфа и т.д. Как известно, такие множества, как $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, К – канторово совершенное множество, $R(1)$ – множество действительных чисел, в десятичном разложении которых нет цифры 1, имеют нулевую меру Лебега и поэтому в смысле меры неразличимы, но они имеют разную размерность Хаусдорфа [2]. Таким образом, размерность Хаусдорфа является более точной характеристикой числового множества и позволяет различать несчетные множества нулевой меры Лебега.

Целью данной работы является вычисление размерности Хаусдорфа подмножества множества цепных дробей с ограниченными элементами $A_{m,n}$, где m и n – подряд идущие ненулевые числа. Мера Лебега этого множества равна нулю [1]. Существует аналогия между множеством $A_{m,n}$ и канторовым множеством К. При построении множества К на каждом шаге используются две цифры, равно как для записи элементов множества $A_{m,n}$ цепными дробями также используются два числа (m и n) [2], [3].

Нахождение точной размерности Хаусдорфа – задача достаточно трудоемкая и для её решения обычно находят оценки размерности сверху и снизу, после чего эти оценки стараются улучшить до тех пор, пока они не совпадут. Основной задачей работы является получение алгоритма вычисления размерности Хаусдорфа для множеств $A_{m,n}$. Кроме этого найдем размерности Хаусдорфа при различных значениях m и n.

Теория цепных дробей представлена в работах многих авторах [1], [4], [5]. Метрическая теория цепных дробей была введена Хинчиным, который исследовал проблему приближения действительных чисел рациональными дробями [1]. Вычисление размерности Хаусдорфа для множества цепных дробей с ограниченными элементами нами в литературе не найдено.

Все полученные результаты являются доказанными и могут быть применены в дальнейших исследованиях.

Объект исследования: теория чисел.

Предмет исследования: размерность Хаусдорфа множества цепных дробей с ограниченными элементами.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

Основные понятия

Размерность – понятие относительное. В физике размерность определяется количеством независимых параметров, необходимых для описания состояния объекта в определенный момент времени – например, координата и скорость. Размерность реального физического пространства определяется количеством координат, необходимых для определения положения объекта. Оно не обязательно равно размерности описания состояния объекта. Скорость при этом окажется зависимой от времени и текущей координаты объекта.

В математике имеется много определений размерности. Наиболее широко понятие размерности применяется в топологии.

Размерность множества тесно связана со способом создания множества. Например, размерность множества $X_1 \times X_2$ равна двум, по количеству участвующих в прямом произведении множеств. По этому способу можно определить следующую размерность:

Размерность множества. Если любой элемент множества X можно определить через прямое произведение других множеств, размерность которых принята за единицу $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, то число n называется размерностью множества X. Наиболее известное множество такого рода – векторное пространство [2].

Размерность Хаусдорфа — естественный способ определить размерность множества в метрическом пространстве. Размерность Хаусдорфа согласуется с нашими обычными представлениями о размерности в тех случаях, когда эти обычные представления есть. Например, в трёхмерном евклидовом пространстве хаусдорфова размерность конечного множества равна нулю, размерность гладкой кривой — единице, размерность гладкой поверхности — двум и размерность множества ненулевого объёма — трём. Для фрактальных множеств размерность Хаусдорфа может принимать дробные значения.

Определение. Определение размерности Хаусдорфа непросто и состоит из нескольких шагов. Пусть Ω – ограниченное множество в метрическом пространстве X.

Пусть $\varepsilon > 0$. Не более чем счетный набор $\{\omega_i\}_{i \in I}$ подмножеств пространства X будем называть ε -покрытием множества Ω, если выполняются следующие два условия:

1. $\Omega \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$,
2. для любого $i \in I$: $|\omega_i| < \varepsilon$ (здесь и далее $|\omega|$ означает диаметр множества ω).

α- мера Хаусдорфа

Пусть $\alpha > 0$. Пусть $\theta = \{\omega_i\}_{i \in I}$ – покрытие множества Ω. Определим следующую функцию, в некотором смысле показывающую «размер» этого покрытия:

$$F_\alpha(\theta) = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} |\omega_i|^\alpha .$$

Обозначим через $M_\alpha^\varepsilon(\Omega)$ «минимальный размер» ε -покрытия множества Ω: $M_\alpha^\varepsilon(\Omega) \coloneqq \inf(F_\alpha(\theta))$, где инфинум берется по всем ε-покрытиям множества Ω.

Очевидно, что функция $M_\alpha^\varepsilon(\Omega)$ (нестрого) возрастает при уменьшении ε, поскольку при уменьшении ε мы только сжимаем множество возможных ε-покрытий. Следовательно, у нее есть конечный или бесконечный предел при $\varepsilon \to +0$:

$$M_\alpha(\Omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} M_\alpha^\varepsilon(\Omega).$$

Величина $\mathrm{M}_\alpha(\Omega)$ называется α-мерой Хаусдорфа множества Ω.

Свойства α-меры Хаусдорфа:

1. α-мера Хаусдорфа является борелевской мерой на X.
2. С точностью до умножения на коэффициент: 1-мера Хаусдорфа на гладкой кривой совпадает с ее длиной; 2-мера Хаусдорфа для гладких поверхностей совпадает с их площадью; d-мера Хаусдорфа множеств в R^d совпадает с их d-мерным обьемом.
3. $\mathrm{M}_\alpha(\Omega)$ убывает по α. Более того, для любого множества Ω существует критическое значение α_0, такое, что:
   1) $\mathrm{M}_\alpha(\Omega) = 0$ для всех $\alpha > \alpha_0$
   2) $\mathrm{M}_\alpha(\Omega) = +\infty$ для всех $\alpha < \alpha_0$

Значение $\mathrm{M}_{\alpha_0}(\Omega)$ может быть нулевым, конечным положительным или бесконечным [6].

Определение. Размерностью Хаусдорфа множества Ω называется число α_0 из предыдущего пункта.

Свойства размерности Хаусдорфа:

1. Размерность Хаусдорфа любого множества не превосходит нижней и верхней размерностей Минковского.
2. Размерность Хаусдорфа не более чем счетного объединения множеств равна максимуму из их размерностей. В частности, добавление счетного множества к любому множеству не меняет его размерности.
3. Для самоподобных множеств размерность Хаусдорфа может быть вычислена явно. Неформально говоря, если множество разбивается на n частей, подобных исходному множеству с коэффициентами $r_1, r_2, \dots, r_n$, то его размерность s является решением уравнения ${r_1}^s + {r_2}^s + \dots + {r_n}^s = 1$. [7]
4. $dim\, S \le dim\, S'$, если $S \subset S'$.

Пример. Используя данное свойство, сосчитаем размерность Хаусдорфа множества Кантора. Для начала рассмотрим построение этого множества. Из единичного отрезка $\mathrm{C}_0 = [0,1]$ удаляем среднюю треть, то есть интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Оставшееся точечное множество обозначим через C_1. Множество $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через C_2. Повторим эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех четырех отрезков, получаем C_3. Дальше таким же образом получаем $C_4, C_5, C_6, \ldots$. Обозначим через C пересечение всех C_i. Полученное множество C и есть канторово множество. Из построения видно, что $n = 2$, $r = \frac{1}{3}$. Отсюда согласно свойству 3 имеем

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1;$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{2}.$$

Логарифмируя полученное равенство, имеем $\ln\left(\frac{1}{3}\right)^s = \ln\frac{1}{2}$. Отсюда $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Значит, размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ [7].

Простейшей **цепной дробью** называется выражение вида:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}} \tag{1}$$

Буквы $a_0, a_1, a_2, \ldots$ при наиболее общем подходе к предмету означают здесь независимые переменные; в зависимости от специальных надобностей эти переменные пробегают значения той или иной области: вещественные или комплексные числа, функции одной или нескольких переменных и т.д. Эти числа называются элементами цепной дроби (1). Число элементов может быть как конечным, так и бесконечным. Условимся в дальнейшем писать бесконечную цепную дробь в виде $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, а конечную цепную дробь в виде $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Таким образом, число членов конечной цепной дроби равно числу элементов, стоящих после точки с запятой.

Особо важную роль играют канонические представления отрезков данной цепной дроби $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$; каноническое представление отрезка $s_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ этой дроби будем обозначать через $\frac{p_k}{q_k}$ и называть **подходящей дробью** порядка k данной цепной дроби a. Это понятие определяется совершенно одинаково для конечных и бесконечных цепных дробей α.

Приведем основные теоремы, необходимые в работе [1].

Теорема 1. Все подходящие дроби несократимы.

Теорема 2 (закон образования подходящих дробей). Для любого $k \geq 2$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2},$$
$$q_k = a_k p_{k-1} + q_{k-2}. \tag{2}$$

Теорема 3. Значение сходящейся бесконечной цепной дроби больше любой подходящей дроби четного порядка и меньше любой дроби нечетного порядка.

Теорема 4. Каждому вещественному числу α соответствует единственная цепная дробь, имеющая это число своим значением. Эта дробь конечна, если число α рационально, и бесконечна, если оно иррационально.

Теорема 5. Для любого $k \geq 1$ верно $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1]$.

Теорема 6. Подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а подходящие дроби нечетного порядка – убывающую последовательность. При этом любая подходящая дробь нечетного порядка больше любой подходящей дроби четного порядка.

Вычисление размерности Хаусдорфа множества $A_{m,n}$

Рассмотрим подмножество $A_{m,n}$ множества цепных дробей с ограниченными элементами, где m и n – подряд идущие ненулевые числа. Мера Лебега этого множества равна нулю.

Определим размерность Хаусдорфа этого множества. Не очевидно, что она не равна нулю, так как мы выбираем два «числа» из бесконечного количества «чисел».

Условившись называть интервал $(0,1)$ интервалом ранга нуль, мы прежде всего последовательно покрываем его сетью все более мелких интервалов, помещая в каждый уже построенный интервал ранга t последовательность интервалов ранга $(t+1)$.

$$I = J_t = \left(\frac{p_t}{q_t}, \frac{p_t + p_{t-1}}{q_t + q_{t-1}} \right),$$

где $\frac{p_t}{q_t}$ – подходящая дробь порядка t цепной дроби.

Рассмотрим теперь произвольный интервал $I = J_t$ ранга t и содержащийся в нем интервал

$$J_{t+1}^{(s)} = \left(\frac{p_t s + p_{t-1}}{q_t s + q_{t-1}}, \frac{p_t (s+1) + p_{t-1}}{q_t (s+1) + q_{t-1}} \right)$$

ранга $(t+1)$ [1].

Так как s может принимать только значения m и n, то имеем два интервала

$$I_1 = J_{t+1}^{(m)} = \left(\frac{m p_t + p_{t-1}}{m q_t + q_{t-1}}, \frac{(m+1) p_t + p_{t-1}}{(m+1) q_t + q_{t-1}} \right)$$

и

$$I_2 = J_{t+1}^{(n)} = \left(\frac{n p_t + p_{t-1}}{n q_t + q_{t-1}}, \frac{(n+1) p_t + p_{t-1}}{(n+1) q_t + q_{t-1}} \right).$$

Вычислим длины этих интервалов. Получим

$$|I_1| = \left| \frac{-q_t p_{t-1} + p_t q_{t-1}}{(mq_t + q_{t-1})((m+1)q_t + q_{t-1})} \right|,$$

$$|I_2| = \left| \frac{p_t q_{t-1} - p_{t-1} q_t}{(nq_t + q_{t-1})((n+1)q_t + q_{t-1})} \right|.$$

Найдем также длину интервала I:

$$|I| = \left| \frac{p_t q_{t-1} - p_{t-1} q_t}{(q_t + q_{t-1}) q_t} \right|.$$

Рассмотрим следующие отношения:

$$\alpha_1 = \frac{|I_1|}{|I|} = \left| \frac{-(q_t + q_{t-1}) q_t}{(mq_t + q_{t-1})((m+1)q_t + q_{t-1})} \right| = \frac{(q_t + q_{t-1}) q_t}{(mq_t + q_{t-1})((m+1)q_t + q_{t-1})},$$

$$\alpha_2 = \frac{|I_2|}{|I|} = \left| \frac{-(q_t + q_{t-1}) q_t}{(nq_t + q_{t-1})((n+1)q_t + q_{t-1})} \right| = \frac{(q_t + q_{t-1}) q_t}{(nq_t + q_{t-1})((n+1)q_t + q_{t-1})}.$$

По теореме 5 $K = \frac{q_t}{q_{t-1}}$. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{K(K+1)}{(mK+1)((m+1)K+1)}; \ \alpha_2 = \frac{K(K+1)}{(nK+1)((n+1)K+1)},$$

где $K = [a_t; a_{t-1}, \dots, a_1]$.

Воспользуемся свойством 4 размерности Хаусдорфа. Построим множества A_{min} и A_{max} такие, чтобы выполнялось соотношение

$$A_{min} \subset A_{m,n} \subset A_{max}.$$

Для того, чтобы построить множество A_{min}, будем уменьшать значение величин α_1 и α_2 до тех пор, пока не получим минимальные значения α_{1min} и α_{2min}. Аналогично, увеличивая значения α_1 и α_2, получим величины α_{1max} и α_{2max}.

Чтобы найти значения α_{1min}, α_{2min}, α_{1max}, α_{2max}, найдем производные функций $\alpha_1(K)$, $\alpha_2(K)$ и их точки экстремума на промежутке $[K_{min}, K_{max}]$.

Определим максимальное и минимальное значения величины K, являющейся подходящей дробью. Отметим, что любая подходящая дробь нечетного порядка не меньше самого числа; подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую последовательность, а значит K_{min} будет определяться цепной дробью нулевого порядка, то есть $K_{min} = [m]$, где $m = n - 1$. Соответствующим образом определим K_{max}. Любая подходящая дробь четного порядка не больше самого числа; подходящие дроби нечетного порядка образуют убывающую последовательность, а значит K_{max} будет определяться цепной дробью первого порядка, то есть одной из дробей: $[m; n]$, $[m; m]$, $[n; m]$, $[n; n]$. Учитывая, что $m = n - 1$, $K_{max} = [n; m]$.

По формуле $\alpha_{1max}^{D_{max}} + \alpha_{2max}^{D_{max}} = 1$ (3 свойство размерности Хаусдорфа) найдем D_{max} численно (например, при помощи программ Maple или Wolfram Mathematica). Аналогично по $\alpha_{1min}^{D_{min}} + \alpha_{2min}^{D_{min}} = 1$ найдем D_{min}.

Так как по построению

$$A_{min} \subset A_{m,n} \subset A_{max},$$

то по свойству 4 размерности Хаусдорфа получим искомую оценку размерности Хаусдорфа D множества $A_{m,n}$:

$$D_{min} \le D \le D_{max}.$$

Вычисление размерности Хаусдорфа для $A_{1,2}$, $A_{2,3}$, $A_{7,8}$

Рассмотрим теперь подмножество $A_{7,8}$ с элементами, принимающими значения 7 и 8, множества цепных дробей с ограниченными элементами.

Определим размерность Хаусдорфа этого множества.

Утверждение 1: Размерность Хаусдорфа D множества $A_{7,8}$ удовлетворяет неравенству

$$0{,}170534 \le D \le 0{,}171069.$$

Доказательство утверждения 1:

По алгоритму имеем, что интервал ранга t:

$$\mathrm{I} = \mathrm{J}_t = \left(\frac{p_t}{q_t}, \frac{p_t + p_{t-1}}{q_n + q_{t-1}}\right),$$

где $\frac{p_t}{q_t}$ - подходящая дробь порядка t цепной дроби.

Рассмотрим произвольный интервал $I = J_t$ ранга t и содержащийся в нем интервал ранга $(t+1)$.Так как в нашем случае s может принимать только значения 7 и 8, то имеем два интервала:

$$I_1 = J_{t+1}^{(7)} = \left(\frac{7p_t + p_{t-1}}{7q_t + q_{t-1}}, \frac{8p_t + p_{t-1}}{8q_t + q_{t-1}}\right) \text{ и } I_2 = J_{t+1}^{(8)} = \left(\frac{8p_t + p_{t-1}}{8q_t + q_{t-1}}, \frac{9p_t + p_{t-1}}{9q_t + q_{t-1}}\right).$$

Вычислим длины этих интервалов, получим:

$$|\mathrm{I}_1| = \left|\frac{-q_t p_{t-1} + p_t q_{t-1}}{(7q_t + q_{t-1})(8q_t + q_{t-1})}\right|, \quad |\mathrm{I}_2| = \left|\frac{-q_t p_{t-1} + p_t q_{t-1}}{(8q_t + q_{t-1})(9q_t + q_{t-1})}\right|.$$

Найдем также длину интервала I:

$$|\mathrm{I}| = \left|\frac{p_t q_{t-1} - p_{t-1} q_t}{(q_t + q_{t-1}) q_t}\right|.$$

Рассмотрим следующие отношения:

$$\alpha_1 = \frac{|\mathrm{I}_1|}{|\mathrm{I}|} = \left| -\frac{q_t(q_t + q_{t-1})}{(7q_t + q_{t-1})(8q_t + q_{t-1})} \right|,$$

$$\alpha_2 = \frac{|\mathrm{I}_2|}{|\mathrm{I}|} = \left| -\frac{q_t(q_t + q_{t-1})}{(8q_t + q_{t-1})(9q_t + q_{t-1})} \right|.$$

Заменив $\mathrm{K} = \frac{q_t}{q_{t-1}}$, получим:

$$\alpha_1 = \left| \frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}+1)}{(7\mathrm{K}+1)(8\mathrm{K}+1)} \right| = \frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}+1)}{(7\mathrm{K}+1)(8\mathrm{K}+1)};$$

$$\alpha_2 = \left| \frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}+1)}{(8\mathrm{K}+1)(9\mathrm{K}+1)} \right| = \frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}+1)}{(8\mathrm{K}+1)(9\mathrm{K}+1)},$$

где $\mathrm{K} = [a_t;\ a_{t-1}, \dots, a_1]$.

K определяется цепной дробью с элементами 7 и 8.

$K_{\min} = 7; K_{\max} = 8 + \frac{1}{7} = \frac{57}{7}$

Найдем производные функций $\alpha_1(K), \alpha_2(K)$:

$$\alpha_1'(K) = \frac{-41K^2 + 2K + 1}{(7K+1)^2(8K+1)^2}, \qquad \alpha_2'(K) = \frac{-55K^2 + 2K + 1}{(8K+1)^2(9K+1)^2}.$$

Определим промежутки возрастания и убывания на $[K_{min}, K_{max}]$, получим, что наибольшие значения функции достигают в точке K_{min}, а наименьшие значения – в точке K_{max}.

Имеем:

$$\alpha_{1\max} = \alpha_1(K_{\min}) = \alpha_1(7) = \frac{28}{1425} \approx 0{,}0196491228\ ,$$

$$\alpha_{1\min} = \alpha_1(K_{\max}) = \alpha_1\left(\frac{57}{7}\right) = \frac{1824}{93989} \approx 0{,}0194065263\ ,$$

$$\alpha_{2\max} = \alpha_2(K_{\min}) = \alpha_2(7) = \frac{7}{456} \approx 0{,}0153508772\ ,$$

$$\alpha_{2\min} = \alpha_2(K_{\max}) = \alpha_2\left(\frac{57}{7}\right) = \frac{456}{30095} \approx 0{,}0151520186\ .$$

По формулам $\alpha_{1max}^{D_{max}} + \alpha_{2max}^{D_{max}} = 1$ и $\alpha_{1min}^{D_{min}} + \alpha_{2min}^{D_{min}} = 1$ численно вычислим D_{max} и D_{min}, используя https://www.wolframalpha.com:

$D_{max} = 0{,}171069$, $D_{min} = 0{,}170534$.

Таким образом, $0{,}170534 \le D \le 0{,}171069$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2: Размерность Хаусдорфа D множества $A_{1,2}$ удовлетворяет неравенству

$$0{,}489536 \le D \le 0{,}55566.$$

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1 (по указанному выше алгоритму). Отдельно выделим ключевые этапы.

$$I_1 = J_{t+1}^{(1)} = \left(\frac{p_t + p_{t-1}}{q_t + q_{t-1}}, \frac{2p_t + p_{t-1}}{2q_t + q_{t-1}} \right), \; I_2 = J_{t+1}^{(2)} = \left(\frac{2p_t + p_{t-1}}{2q_t + q_{t-1}}, \frac{3p_t + p_{t-1}}{3q_t + q_{t-1}} \right).$$

$$|\mathrm{I}_1| = \left| \frac{-q_t p_{t-1} + p_t q_{t-1}}{(q_t + q_{t-1})(2q_t + q_{t-1})} \right|, \quad |\mathrm{I}_2| = \left| \frac{-q_t p_{t-1} + p_t q_{t-1}}{(2q_t + q_{t-1})(3q_t + q_{t-1})} \right|.$$

$$\alpha_1 = \frac{|\mathrm{I}_1|}{|\mathrm{I}|} = \left| -\frac{q_t}{(2q_t + q_{t-1})} \right|, \quad \alpha_2 = \frac{|\mathrm{I}_2|}{|\mathrm{I}|} = \left| -\frac{q_t(q_t + q_{t-1})}{(2q_t + q_{t-1})(3q_t + q_{t-1})} \right|.$$

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{K}}{2\mathrm{K}+1}, \; \alpha_2 = \frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}+1)}{(2\mathrm{K}+1)(3\mathrm{K}+1)}, \text{ где } \mathrm{K} = \frac{q_t}{q_{t-1}}.$$

$$K_{\min} = 1; K_{\max} = 2 + \frac{1}{1} = 3.$$

$$\alpha_1'(K) = \frac{1}{(2K+1)^2}, \qquad \alpha_2'(K) = \frac{-k^2+2k+1}{(2K+1)^2(3K+1)^2}.$$

$$\alpha_{1\max} = \alpha_1(K_{\max}) = \alpha_1(3) = \frac{3}{7} \approx 0{,}4285714285, \; \alpha_{1\min} = \alpha_1(K_{\min}) = \alpha_1(1) = \frac{1}{3} \approx 0,(3),$$

$$\alpha_{2\max} = \alpha_2(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}1715728752, \quad \alpha_{2\min} = \alpha_2(K_{\min}) = \alpha_2(1) = \frac{1}{6} \approx 0{,}1(6).$$

$D_{max} = 0{,}55566$, $D_{min} = 0{,}489536$.

Аналогичным образом доказывается

Утверждение 3: Размерность Хаусдорфа D множества $A_{2,3}$ удовлетворяет неравенству

$$0{,}336041 \le D \le 0{,}339381.$$

Таким образом, полученные результаты можно представить в следующем виде

Теорема. Чтобы вычислить размерность Хаусдорфа D подмножества множества цепных дробей с ограниченными элементами $A_{m,n}$, где $m = n - 1$ и n – подряд идущие ненулевые числа, необходимо:

1. Задать интервалы

$$I_1 = J_{t+1}^{(m)} = \left(\frac{mp_t + p_{t-1}}{mq_t + q_{t-1}}, \frac{(m+1)p_t + p_{t-1}}{(m+1)q_t + q_{t-1}} \right) \text{ и } I_2 = J_{t+1}^{(n)} = \left(\frac{np_t + p_{t-1}}{nq_t + q_{t-1}}, \frac{(n+1)p_t + p_{t-1}}{(n+1)q_t + q_{t-1}} \right).$$

Тогда их длины (покрытия) равны

$$|I_1| = \left| \frac{-q_t p_{t-1} + p_t q_{t-1}}{(mq_t + q_{t-1})((m+1)q_t + q_{t-1})} \right|, \qquad |I_2| = \left| \frac{p_t q_{t-1} - p_{t-1} q_t}{(nq_t + q_{t-1})((n+1)q_t + q_{t-1})} \right|.$$

2. Найти α_1, α_2:

$$\alpha_1 = \frac{|I_1|}{|I|} = \left|\frac{-(q_t + q_{t-1})q_t}{(mq_t + q_{t-1})((m+1)q_t + q_{t-1})}\right| = \frac{(q_t + q_{t-1})q_t}{(mq_t + q_{t-1})((m+1)q_t + q_{t-1})},$$

$$\alpha_2 = \frac{|I_2|}{|I|} = \left|\frac{-(q_t + q_{t-1})q_t}{(nq_t + q_{t-1})((n+1)q_t + q_{t-1})}\right| = \frac{(q_t + q_{t-1})q_t}{(nq_t + q_{t-1})((n+1)q_t + q_{t-1})},$$

где $|I| = \left|\frac{p_t q_{t-1} - p_{t-1} q_t}{(q_t + q_{t-1})q_t}\right|$.

3. Заменить $\frac{q_t}{q_{t-1}} = K$ и рассмотреть функции α_1, α_2 от одной переменной:

$$\alpha_1 = \frac{K(K+1)}{(m\mathrm{K}+1)((m+1)K+1)};\ \alpha_2 = \frac{K(\mathrm{K}+1)}{(n\mathrm{K}+1)((n+1)\mathrm{K}+1)}.$$

4. Найти наибольшие и наименьшие значения функций α_1, α_2 на промежутке $[K_{min}, K_{max}]$, где $K_{min} = [m]$, $K_{max} = [n; m]$.

5. Вычислить D_{max} и D_{min} по формулам $\alpha_{1max}^{D_{max}} + \alpha_{2max}^{D_{max}} = 1$, $\alpha_{1min}^{D_{min}} + \alpha_{2min}^{D_{min}} = 1$.

Тогда размерность Хаусдорфа D подмножества множества цепных дробей с ограниченными элементами $A_{m,n}$

$$D_{min} \leq D \leq D_{max}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведена и доказана теорема, которая позволяет вычислить размерность Хаусдорфа подмножества множества цепных дробей с ограниченными элементами $A_{m,n}$, где m и n – подряд идущие ненулевые числа.

Получена размерность Хаусдорфа для множеств $A_{1,2}$, $A_{2,3}$, $A_{7,8}$.

Исследование на данную тему было представлено автором на международной конференции «Первый шаг в науку – 2019» [8].

Результаты данного исследования могут быть использованы в криптографии, компьютерной графике и при решении задач математической физике для разграничения множеств нулевой меры Лебега.

В дальнейшем планируем рассмотреть вычисление размерности Хаусдорфа $A_{m,n}$, где m и n – не подряд идущие ненулевые числа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хинчин, А. Я. Цепные дроби / А. Я. Хинчин. – М.: Физматлит, 1960. – 112 с.
2. Герега, А. Н. Конструктивные фракталы в теории множеств / А. Н. Герега. – Одесса: Освита Украины, 2017. – 84 с.
3. Верещагин, Н. К. Начала теории множеств / Н. К. Верещагин, А. Шень. – М.: МЦНМО, 2017. – 112 с.
4. Бухштаб, А. А. Теория чисел / А. А. Бухштаб. – Москва: Просвещение, 1966. – 384 с.
5. Виленкин, Н. Я. Алгебра и теория чисел / Н. Я. Виленкин, Н. А. Казачек, Г. Н. Перлатов, А. И. Бородин. 2-е изд., – М.: Просвещение, 1984. – 192 с.
6. Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М.:, Л.: ОНТИ, 1937. – 306 с.
7. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – Москва: Мир, 1991. – 260 с.
8. Погосян, М. А. Размерность Хаусдорфа подмножества множества цепных дробей / «Первый шаг в науку – 2019»: сборник материалов международного форума студенческой и учащейся молодежи в рамках международного научно-практического инновационного форума «INMAX'19» (Минск, 11-12 декабря 2019 г.). В 8 ч. Часть 4 / ОО «Центр молодежных инноваций», ООО «Минский городской технопарк». – Минск: Лаборатория интеллекта, 2019. – 100 с.