ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГИМНАЗИЯ №3 Г. ГРОДНО»

Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

«Разрезания многоугольников»

Автор работы:

Шелесная Ольга Игоревна, 8 класс
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»,

Руководитель работы:

Разумов Евгений Владимирович, учитель математики, магистр педагогических наук,
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»

г. Гродно, 2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на разрезание интересовали ученых еще с древнейших времен. Они возникли из потребностей практиков-землемеров и строителей архитектурных сооружений древнего мира. Задачи на разрезание вызывают постоянный интерес. Однако до сих пор они остаются не до конца исследованными. Задачи на данную тему часто встречаются на олимпиадах и математических турнирах.

На седьмом Минском городском открытом турнире юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) в 2020 году была предложена задача «Разрезания многоугольников». В данной работе предложено решение и обобщение этой задачи [1]. Помимо предложенной задачи про разрезание фигуры на треугольники, в работе рассмотрена задача, в которой фигура распадается на k-угольники.

Объект исследования: задачи на разрезания.

Предмет исследования: разрезание многоугольников.

Цель работы: найти возможное количество вершин фигуры, которую можно прямолинейным разрезом разделить на n k-угольников.

На основании поставленной цели определим ряд **задач** исследования:

1. Выяснить, можно ли нарисовать фигуру, которая при разрезании по прямой линии распадется на три треугольника? Если да, то найти количество вершин в такой фигуре.
2. Нарисовать серию фигур, которые при разрезании по прямой линии распадутся на 4, 5, 6 и т.д. треугольников. Найти наименьшее количество вершин у таких фигур.
3. Найти натуральные n и m, такие, что существует фигура, которая после разрезании по прямой линии одним способом распадется на n треугольников, а после разрезании по прямой линии каким-то другим способом — распадется на m треугольников.
4. Найти наименьшее и наибольшее количество вершин у фигуры, которую прямолинейным разрезом можно разделить на n k-угольников?

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

В работе будем рассматривать многоугольники, у которых из каждой вершины выходит по две стороны.

Утверждение 1.

Общее количество вершин в фигуре, которую можно одним прямолинейным разрезом разделить на n треугольников равно $K_{\text{в}} = (3n - (a + b + c))$;

a – количество вершин фигуры, которые являются общими для двух треугольников, лежащих в первой (верхней) полуплоскости относительно линии разреза (для примера на рисунке $a = 1$ так как данному условию удовлетворяет только точка C).

b–аналогично, количество вершин фигуры, которые являются общими для двух треугольников, лежащих во второй (нижней) полуплоскости относительно линии разреза (для примера на рисунке $b = 2$, так как данному условию удовлетворяют только точки Y и X).

c—количество вершин фигуры, которые являются общими для двух треугольников, лежащих в разных полуплоскостях относительно линии разреза (смотреть рисунок 1) (для примера на рисунке $c = 1$, так как данному условию удовлетворяет только точка A).

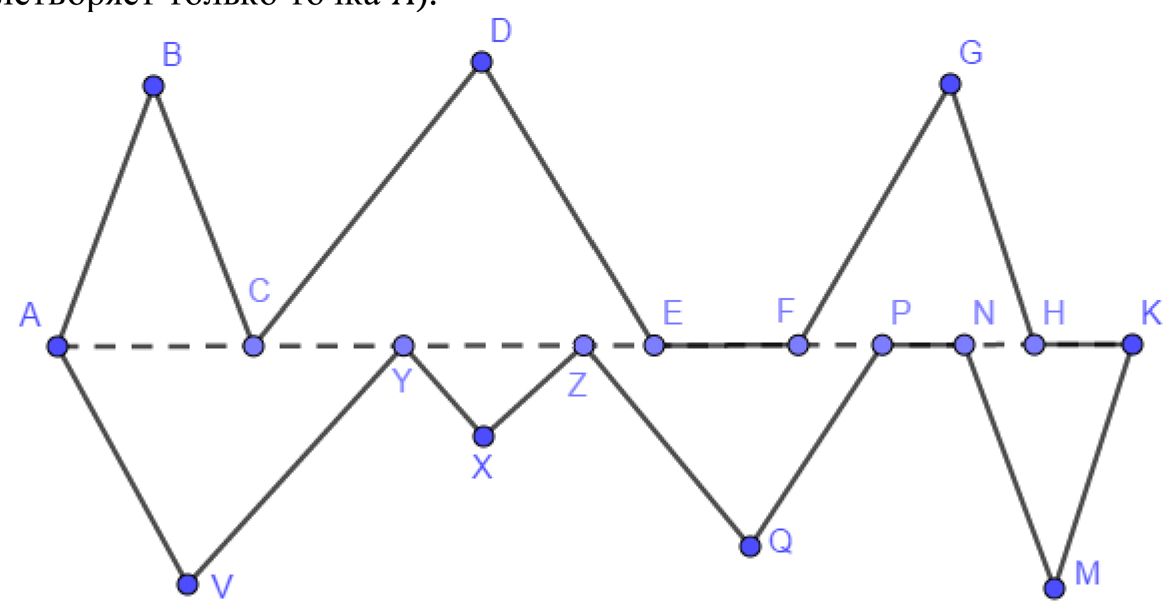


Рисунок 1

Доказательство.

Так как многоугольник после прямолинейного разреза разделился на треугольники, то ровно две вершины каждого получившегося треугольника лежат на линии разреза (пример на рисунке 1). Заметим, что в каждой из полуплоскостей находятся хотя бы один треугольник.

Посчитаем общее количество вершин фигуры. Пусть в первой (верхней) полуплоскости лежат m треугольников, тогда во второй (нижней) полуплоскости находятся $(n-m)$ треугольников.

Так как фигура распалась на n треугольников то, посчитав вершины всех треугольников по отдельности, получаем $3n$ вершин. Чтобы получить общее количество вершин исходной фигуры отнимем от $3n$ количество вершин, посчитанных дважды.

Вершины, посчитанные дважды, могут возникать в следующих двух случаях:

1) Вершина является общей для двух треугольников, лежащих в одной плоскости.

2) Вершина является общей для двух треугольников лежащих в разных полуплоскостях (такие вершины могут являться только началом или концом разреза, иначе из какой-то вершины выходит более чем два ребра)

Количество вершин удовлетворяющих условию 1) для треугольников из первой (верхней) полуплоскости равно a, для второй (нижней) полуплоскости оно равно b, а количество вершин, удовлетворяющих 2) условию равно c отсюда $K_в = (3n-(a+b+c))$, что и требовалось доказать.

Замечание 1.

c принимает значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Доказательство.

Рассмотрим граничную точку разреза: она может либо *а)* являться вершиной многоугольника (рисунок 2), при этом разрез может проходить вдоль стороны (рисунок 3), или нет (рисунок 2):

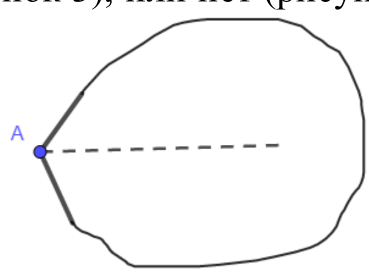


Рисунок 2

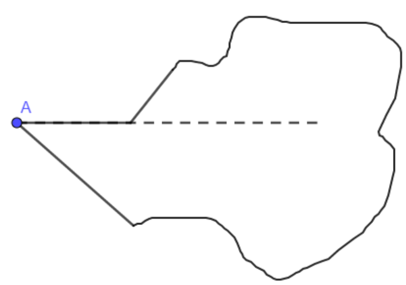


Рисунок 3

либо *б)* не являться вершиной, так как граничная точка разреза лежит на стороне фигуры и не является ее вершиной (рисунок 4):

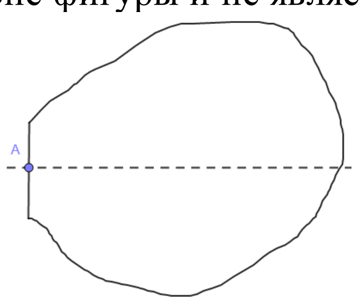


Рисунок 4

Тогда для рисунка 2 имеем один «лишний» повтор вершины A, для рисунка 3 нет «лишних» повторов (то есть ноль), для рисунка 4 – два «лишних» повтора.

Сумма количеств «лишних» повторов для крайних точек разреза равняется c. А значит c принимает значение 0, 1, 2, 3 или 4, что и требовалось доказать.

Замечание 2.

a принимает все значения от нуля до $(m-1)$, где m—количество треугольников, образовавшихся в первой (верхней) полуплоскости;

b принимает все значения от нуля до $(n-m-1)$ где $(n-m)$ количество треугольников, образовавшихся во второй (нижней) полуплоскости;

$(a+b)$ принимает все значения от 0 до $(n-2)$.

Доказательство.

Рассмотрим первую (верхнюю) полуплоскость:

$a=0$ (рисунок 5) (ни у каких двух треугольников, лежащих в этой полуплоскости, нет общих вершин).

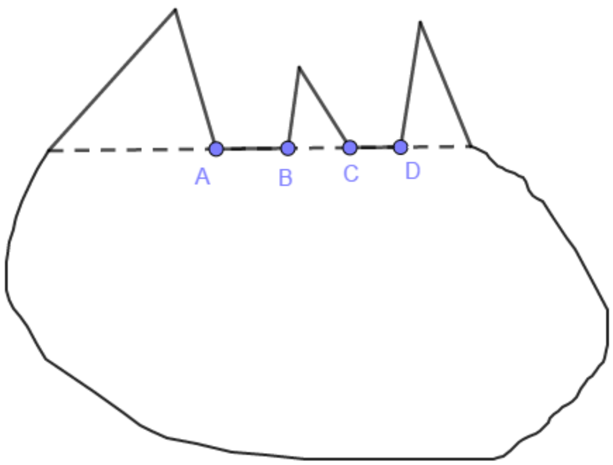


Рисунок 5

Убрав одну из вершин треугольника, лежащую на разрезе и не являющуюся граничной точкой разреза (на рисунке 5 эта любая из вершин A, B, C, D) мы увеличим a на единицу, так как посчитаем одну и ту же вершину в двух треугольниках.

Например, на рисунке 5 уберём вершину B (рисунок 6), то есть вершину A посчитаем дважды, значит $a=1$.

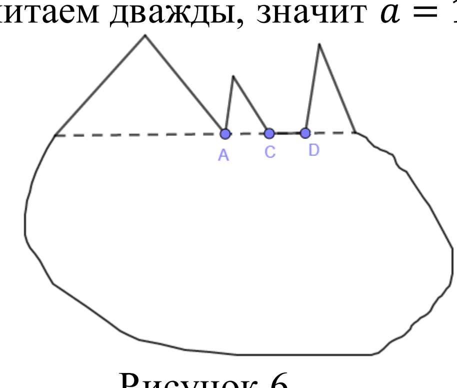


Рисунок 6

Аналогично действуя, мы будем последовательно увеличивать a на единицу, до того момента, пока любые два соседних треугольника не будут иметь ровно одну общую вершину. Таких пар соседних треугольников $(m-1)$, а значит a не превышает значения $(m-1)$.

Для нижней полуплоскости аналогично получаем, что b может принимать все значения от 0 до $(n-m-1)$

Отсюда сумма $(a+b)$ может принимать все значения от 0 до $(m-1+n-m-1) = (n-2)$, что и требовалось доказать.

Следствие 1

Сумма $(a+b+c)$ принимает все значения от 0 до $(n+2)$

Доказательство следует из замечания 1 и 2.

Следствие 2

Наименьшее количество вершин у тех фигур, которые при разрезании распадутся на n треугольников равно $(3n-(n+2)) = (2n-2)$.

Один из возможных примеров подобного многоугольника указан на рисунке 7.

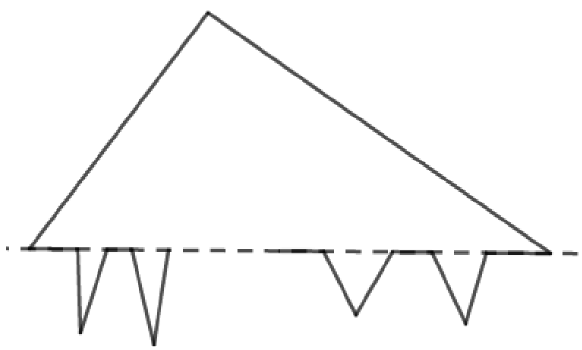


Рисунок 7

Следствие 3

Наибольшее количество вершин у тех фигур, которые при разрезании распадутся на n треугольников равно $(3n-0) = 3n$.

Один из возможных примеров указан на рисунке 8.

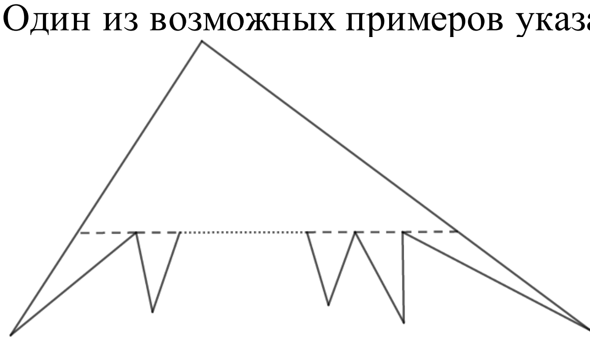


Рисунок 8

Следствие 4

Общее количество вершин в фигуре, которую можно одним прямолинейным разрезом разделить на n треугольников может принимать значения от $(2n-2)$ до $3n$.

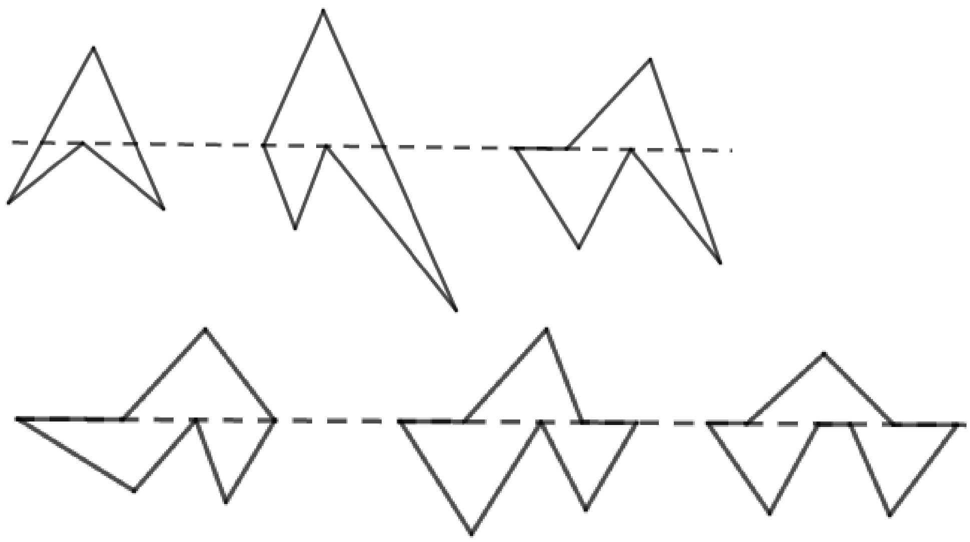
Доказательство следует из следствия 2, следствия 3, а так же того факта, что мы можем изменить a, b и c на единицу.

Найдем, сколько вершин будет у фигуры, которую при разрезании по прямой линии на треугольники распадется на три треугольника.

По следствию 4, так как $n = 3$ получаем

$$2n - 2 \leq K_{\text{в}} \leq 3n$$

$$4 \leq K_{\text{в}} \leq 9$$



Исходя из следствия 2 наименьшее количество вершин при разрезании на n треугольников равно $2n - 2$, пример для общего случая построения многоугольника указан на рисунке 7.

Во второй полуплоскости (нижней) разместим $(n-1)$ треугольник, а в первой полуплоскости (верхней) один треугольник то есть получим фигуры, удовлетворяющие условию.

Пусть существует k-угольник, который после разрезания по прямой линии одним способом распадется на n треугольников, а после разрезания по прямой линии каким-то другим способом распадется на m треугольников:

Рассмотрим вершину, лежащую на линии первого разреза, и отличную от граничных вершин.

Тогда внутренний угол k-угольника, образованный сторонами, выходящими из данной вершины, более $180°$, так как обе стороны угла лежат в одной полуплоскости относительно прямой разреза или одна из сторон лежит на линии разреза.

Если данная вершина не лежит на линии второго разреза, то образуется фигура с углом, большим $180°$, а значит, эта фигура не является треугольником.

Таким образом, если на линии разреза лежат более одной вершины многоугольника, отличные от крайних точек разреза, то линии разрезов совпадают (так как через две точки можно провезти единственную прямую).

Докажем методом от противного, что $m < 4$ и $n < 4$.

Пусть каким-то разрезом мы получим $n \geq 4$ треугольников. Если в одной полуплоскости относительно линии разреза находится не менее трех треугольников, то на линии разреза находится не менее двух вершин, отличных от граничных точек разреза (иначе около какой-то вершины образуется угол больший $180°$, см. выше). Получили противоречие, так как в таком случае второй разрез совпадет с первым. Таким образом, для всех $n \geq 5$, по принципу Дирихле, в одной из полуплоскостей находится не менее трех вершин, по выше сказанному получаем противоречие для этих случаев.

Рассмотрим $n = 4$. Тогда в каждой из полуплоскостей расположены не более чем по два треугольника, иначе получаем противоречие.

Пусть точка A, лежащая на линии разреза, является общей для двух треугольников первой полуплоскости, а точка B, также лежащая на линии разреза, является общей для двух треугольников второй полуплоскости. Так как на линии разреза может располагаться не более одной такой точки, получаем, что точки A и B совпадают. Тогда в такой фигуре из этой вершины A (B) выходит более, чем две стороны. Получаем противоречие.

Таким образом, получаем, что $n \leq 3$ (аналогично $m \leq 3$).

Так как мы не можем разрезать фигуру на один треугольник, то возможны только следующие случаи:

а) $n = 2, m = 2$;

б) $n = 2, m = 3$;

в) $n = 3\ m = 3$.

Для каждого случая приведем примеры:

а) $n = 2, m = 2$ – рисунок 9.

б) $n = 2, m = 3$ – рисунок 10.

в) $n = 3\ m = 3$ – рисунок 11.

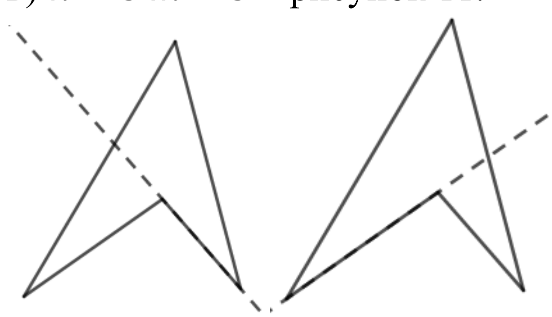


Рисунок 9

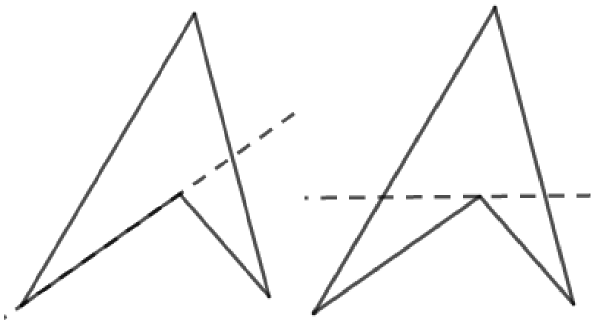


Рисунок 10

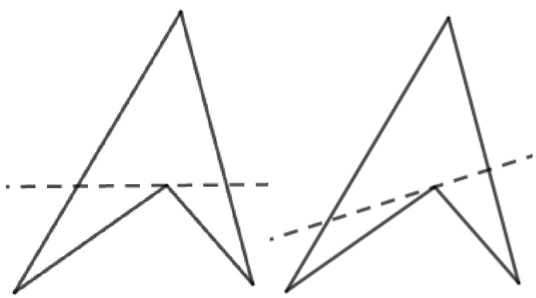


Рисунок 11

Мы понимаем под первым способом — разрезание по одной прямой, а под вторым способом — разрезание по некоторой другой прямой, не совпадающей с первой. Таким образом, допускаем равенство n и m.

Рассмотрим разрезание фигуры одним прямолинейным разрезом на n k-угольников.

Утверждение 2.

Общее количество вершин в фигуре, которую можно одним прямолинейным разрезом разделить на n k-угольников равно $K_{\text{в}} = (k \cdot n - (a + b + c))$, где a – количество вершин фигуры, которые являются общими для двух k-угольников, лежащих в первой (верхней) полуплоскости относительно линии разреза,

b – количество вершин фигуры, которые являются общими для двух k-угольников, лежащих во второй (нижней) полуплоскости относительно линии разреза,

c— количество вершины фигуры, которые являются общими для двух k-угольников, лежащих в разных полуплоскостях относительно линии разреза.

Доказательство проведем аналогично со случаем для треугольников, рассмотренных ранее.

Так как многоугольник, после прямолинейного разреза, разделился на k-угольники, то ровно две вершины каждого получившегося треугольника лежат на линии разреза. Заметим что в каждой из полуплоскостей находятся хотя бы один из k-угольников, при этом очевидно, что k-угольники не накладываются друг на друга.

Посчитаем общее количество вершин фигуры. Пусть в первой (верхней) полуплоскости лежат m k-угольников, тогда во второй (нижней) полуплоскости находятся $(n - m)$ k-угольников.

Так как фигура распалась на n k-угольников, то, посчитав вершины всех k-угольников по отдельности, получаем $k \cdot n$ вершин. Чтобы получить общее количество вершин исходной фигуры от $k \cdot n$ количество вершин, посчитанных дважды.

Вершины, посчитанные дважды, могут возникать в следующих двух случаях:

1) Вершина является общей для двух k-угольников, лежащих в одной плоскости.

2) Вершина является общей для двух k-угольников лежащих в разных полуплоскостях (такие вершины могут являться только началом или концом разреза, иначе из какой-то вершины выходит более чем два ребра)

Количество вершин удовлетворяет условию 1) для k-угольников из первой (верхней) полуплоскости равно a, для второй (нижней) полуплоскости оно равно b, а количество вершин, удовлетворяющих условию 2) равно c отсюда $K_{\text{в}} = (k \cdot n - (a + b + c))$, что и требовалось доказать.

Заметим, что замечания 1, 2 и 3 для этого случая также будут справедливы, так как они основываются на подсчёте количества точек на самом разрезе, а не вне его. Таким образом $(a + b)$ принимает все значения от 0 до $(n - 2)$, и c принимает значение 0, 1, 2, 3 или 4, значит и следствие 1 также останется верным.

Следствие 5

Наименьшее количество вершин у тех фигур, которые при разрезании распадутся на n k-угольников равно $(kn - (n + 2)) = ((k - 1)n - 2)$.

Один из возможных примеров подобного многоугольника указан на рисунке 12.

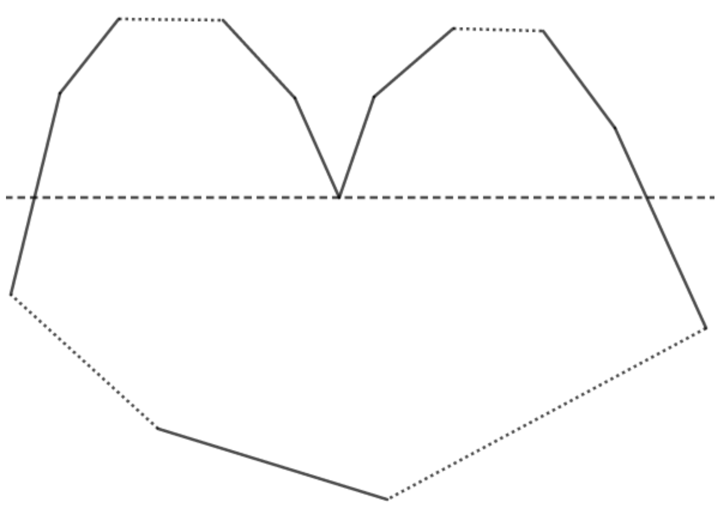


Рисунок 12

Следствие 6

Наибольшее количество вершин у тех фигур, которые при разрезании распадутся на n k-угольников равно $(kn - 0) = kn$.

Один из возможных примеров указан на рисунке 13.

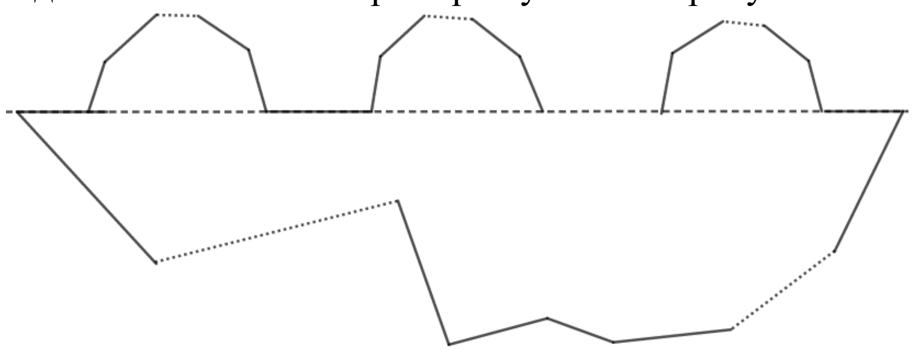


Рисунок 13

Следствие 7

Общее количество вершин в фигуре, которую можно одним прямолинейным разрезом разделить на n k-угольников может принимать значения от $((k-1)n - 2)$ до $k \cdot n$.

Доказательство следует из следствия 5, следствия 6, а также факта, что мы можем изменить a, b и c на единицу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе подготовки к Минскому городскому открытому турниру юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) возникла идея обобщить задачу «Разрезания многоугольников», то есть рассмотреть все возможные значения вершин фигуры, которую можно разрезать по прямой.

В ходе исследования получены следующие результаты:

-сформулировано и доказано следствие 4 о возможном количестве вершин фигуры при разрезании на n треугольников;

-найдены наибольшее и наименьшее количество вершин фигуры; приведены соответствующие примеры;

-найдены все возможные пары $(m; n)$: $(3; 3)$, $(3; 2)$, $(2; 2)$ для фигур, которые можно одним способом разрезать на n треугольников, а другим – на m треугольников; приведены соответствующие примеры;

-рассмотрена задача, когда исходная фигура распадается на k-угольники. Доказано, что количество вершин такой фигуры лежит в границах от $((k-1)n-2)$ до $k \cdot n$.

В дальнейшем планируем рассмотреть подобную задачу в пространстве.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Исследовательские задания VII Минского городского открытого турнира юных математиков (младшая лига – 5-7 классы). – Режим доступа: http://www.uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html – Дата доступа: 10.03.2020.