Государственное учреждение образования
«Гимназия № 10 г. Гродно»

Секция «алгебра, геометрия и математический анализ»

Решение исследовательской задачи
«Исследование расположения дробей"

Шило Даниил Русланович,
6 «Б»класс
ГУО «Гимназия №10 г. Гродно»

Стацевич Елизавета Андреевна,
учитель математики
ГУО «Гимназия №10 г.Гродно»

Гродно, 2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данная исследовательская задача была предложена для решения и участия в VII Минском городском открытом турнире юных математиков 2020 года.
Условие задачи:

1. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых однозначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$?

2. Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{3}{7}$? А $\frac{4}{7}$?

3. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{87}{38}$ и $\frac{88}{39}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

4. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{68}{21}$ и $\frac{76}{23}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

5. Найдите наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее следующему условию: для любого целого числа m, где $0<m<2019$, существует целое число k такое, что $\frac{m}{2019}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2020}$.

6. Предложите свои обобщения и направления исследования этой задачи и изучите их. Одно из естественных направлений – попробовать сформулировать и изучить пункты задачи для обыкновенных правильных несократимых дробей, числители и знаменатели которых n-значные числа (или только знаменатели – n-значные числа).

Актуальность.

Задачи такого рода – логические, исследовательские, головоломки, представляют большой интерес. Именно они развивают сообразительность, смекалку, самостоятельность мышления, так как универсальных способов их решения нет. А самое главное, в процессе их рассмотрения, ты приходишь к новым вариантам решения, пытаешься создать свои алгоритмы поиска и исследования.

Здесь можно в полной мере проявить свои «математически творческие» способности.

Чем больше учащихся будет заниматься исследованием таких интересных и многогранных задач, тем больше они смогут развивать умения и навыки именно в создании своих собственных нестандартных вариантов решений.

Если говорить о методах решения, то мы использовали аналитические методы – оценки и сравнения, графический метод – представлен как дополнение к исследованию, а также применение программирования – в программе PascalABC мы создали две программы, которые помогают значительно быстрее искать ответы на поставленные в задаче и на некоторые дополнительные вопросы.

Основная часть

Пункт 1.

1) Пусть $\frac{a}{b}$ – искомая дробь, меньшая, чем $\frac{3}{7}$, тогда разность $\frac{3}{7}-\frac{a}{b}$ должна быть наименьшей дробью.

$\frac{3}{7}-\frac{a}{b}=\frac{3b-7a}{7b}$, значит $3b-7a=1$, а $7b$ должно быть наибольшим.

$7a=3b-1$; $a=\frac{3b-1}{7}$. Подставляем вместо b числа 9, 8, 7 и т.д. пока не получим целое a. Получаем $a=2$, то $b=5$. Значит $\frac{2}{5}$ – искомая дробь.

2) Пусть $\frac{c}{d}$ – искомая дробь, большая, чем $\frac{3}{7}$, тогда разность $\frac{c}{d}-\frac{3}{7}$ должна быть наименьшей дробью.

$\frac{c}{d}-\frac{3}{7}=\frac{7c-3d}{7d}$, значит $7c-3d=1$, а $7d$ должно быть наибольшим.

$c=\frac{3d+1}{7}$, Подставляем вместо d числа 9, 8, 7 и т.д. пока не получим целое c.

При $d=9$ найдем $c=4$.

Значит $\frac{4}{9}$ – искомая дробь. Таким образом, $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}<\frac{4}{9}$.

Пункт 2.

1) Пусть $\frac{a}{b}$ – искомая дробь, меньшая, чем $\frac{3}{7}$, a и b – двузначные числа, тогда разность $\frac{3}{7}-\frac{a}{b}$ должна быть наименьшим числом.

Имеем $\frac{3}{7}-\frac{a}{b}=\frac{3b-7a}{7b}$, значит $3b-7a=1$, а $7b$ – наибольшее число.

$7a=3b-1;\quad a=\frac{3b-1}{7}$.

Рассмотрим подбором, начиная с $b=99$.

Если $b=96$, то $a=41$, т.е. при $b=96$ знаменатель дроби $\frac{1}{7b}$ – наибольший, значит $\frac{41}{96}$ – искомая дробь.

2) Пусть $\frac{c}{d}$ – искомая дробь, большая, чем $\frac{3}{7}$, c и d – двузначные числа, тогда разность $\frac{c}{d}-\frac{3}{7}$ – наименьшее число.

Имеем $\frac{c}{d}-\frac{3}{7}=\frac{7c-3d}{7d}$, где $7c-3d=1$, $7d$ – наибольшее число.

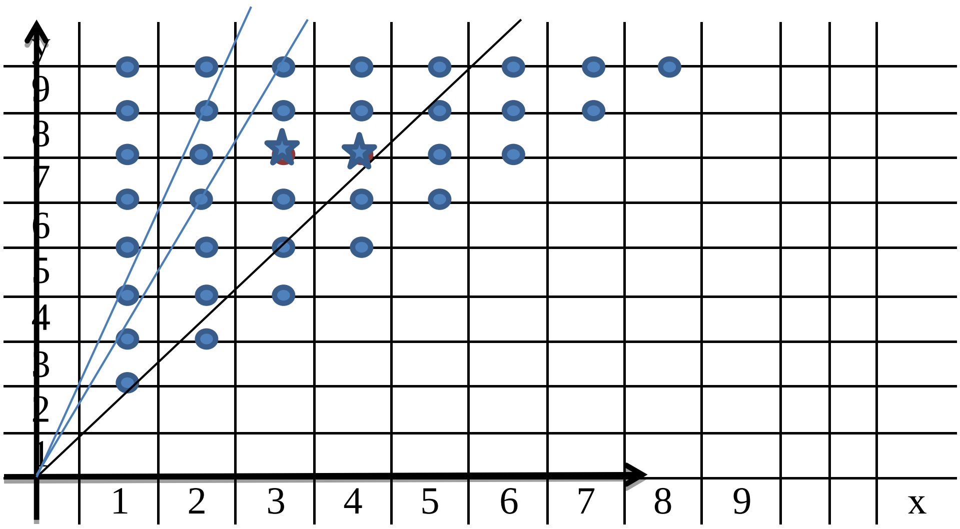
$7c=3d+1;\quad c=\frac{3d+1}{7}$.

Рассмотрим подбором, начиная с $d=99;98;97;\ldots$.

Если $d=93$, то $c=40$, т.е. при $d=93$ знаменатель дроби $\frac{1}{7d}$ – наибольший, значит $\frac{40}{93}$ – искомая дробь, тогда $\frac{41}{96}<\frac{3}{7}<\frac{40}{93}$.

Рассмотрим аналогично для дроби $\frac{4}{7}$.

1) Разность $\frac{4}{7}-\frac{a}{b}$ должна быть наименьшим числом.
   Имеем $\frac{4}{7}-\frac{a}{b}=\frac{4b-7a}{7b}$, значит $4b-7a=1, 7b$ – наибольшее число.
   $7a=4b-1; \quad a=\frac{4b-1}{7}$.
   Рассмотрим подбором, начиная с $b=99; 98; 97; \ldots.$
   Если $b=93$, то $a=53$, т.е. при $b=93$ знаменатель дроби $\frac{1}{7b}$ – наибольший, значит $\frac{53}{93}$ – искомая дробь.
2) Разность $\frac{c}{d}-\frac{4}{7}$ должна быть наименьшим числом.
   Имеем $\frac{c}{d}-\frac{4}{7}=\frac{7c-4d}{7d}$, значит $7c-4d=1$, а 7d – наибольшее число.
   $7c=4d+1; \quad c=\frac{4d+1}{7}$.
   Рассмотрим подбором, начиная с $d=99; 98; 97; \ldots.$
   Если $d=96$, то $c=55$, т.е. $\frac{55}{96}$ – искомая дробь, тогда $\frac{53}{93}<\frac{4}{7}<\frac{55}{96}$.



Здесь можно применить также графический метод. Поставим каждой дроби $\frac{x}{y}$ точку с координатами (x; y) на декартовой плоскости, а также луч, проходящий через начало координат и эту точку. Чем меньше дробь, тем ближе луч к оси ординат. Чем больше дробь, тем ближе луч к биссектрисе первой четверти. Чтобы расставить дроби в порядке возрастания, поворачиваем луч, проходящий через начало координат от оси Оу к прямой у = х и записываем поочерёдно точки с целочисленными координатами, через которые будет проходить данный луч.

Получим $\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$.

Чтобы найти ближайший соседний для дроби $\frac{3}{7}$, проводим луч через начало координат и точку с координатами (3; 7) и поворачиваем его вокруг начала координат влево и вправо. Ближайшие точки с целыми координатами (для однозначных чисел) $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{9}$.
Ответ: $\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9}$.
Для $\frac{4}{7}$ получим - $\frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$.

Пункт 3.

$\frac{88}{39} < \frac{87}{38}$.
Сперва отбросим целую часть. $2\frac{10}{39} < 2\frac{11}{38}$. Найдём дробь $\frac{x}{y}$ так, чтобы $\frac{10}{39} < \frac{x}{y} < \frac{11}{38}$ и чтобы y был наименьшим.
Так как $\frac{11}{38} < \frac{1}{2}$, то y>2.
Заметим, что $\frac{11}{38} < \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$; значит y>3.
Далее найдем $\frac{1}{4} = \frac{10}{40} < \frac{10}{39} < \frac{x}{y} < \frac{11}{38} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.
Отсюда следует, что $y > 4$.
Пусть $y = 5$. $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{10}{39} < \frac{x}{y} < \frac{11}{38} < \frac{1}{3} = \frac{2}{6} < \frac{2}{5}$.
Значит, увеличиваем y на 1.
Пусть $y = 6$. $\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{10}{39} < \frac{x}{y} < \frac{11}{38} < \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.
Пусть $y = 7$. $\frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{10}{39}$, но $\frac{10}{39} < \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$.
Сравним $\frac{2}{7}$ и $\frac{11}{38}$. $\frac{76}{7\cdot 38} < \frac{77}{7\cdot 38}$, значит $\frac{2}{7} < \frac{11}{38}$.
Таким образом, $\frac{2}{7}$ – это дробь с наименьшим знаменателем, удовлетворяющим неравенству $\frac{10}{39} < \frac{2}{7} < \frac{11}{38}$.
Прибавим целую часть 2: $\frac{88}{39} < \frac{16}{7} < \frac{87}{38}$.

Пункт 4.

$\frac{68}{21} < \frac{76}{23}$.
Отбросим целую часть $3\frac{5}{21} < 3\frac{7}{23}$. Найдём дробь $\frac{x}{y}$, удовлетворяющую неравенству $\frac{5}{21} < \frac{x}{y} < \frac{7}{23}$ так, чтобы y был наименьшим.
Заметим, что $\frac{7}{23} < \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. Значит, $y > 3$.
$\frac{1}{4} = \frac{5}{20} > \frac{5}{21}$; $\frac{1}{4} = \frac{7}{28} < \frac{7}{23}$. Значит, $\frac{5}{21} < \frac{1}{4} < \frac{7}{23}$.

Таким образом, искомая дробь $\frac{1}{4}$.

Прибавим целую часть: $\frac{68}{21} < \frac{13}{4} < \frac{76}{23}$.

<u>Можно предложить следующий алгоритм</u> для поиска дроби $\frac{x}{y}$ с наименьшим знаменателем, удовлетворяющей неравенству $A < \frac{x}{y} < B$:

1) Проверяем, что дроби A и B правильные, иначе отбрасываем целую часть.
2) Проверяем, принадлежит ли этому интервалу $\frac{1}{2}$. Если $A < \frac{1}{2} < B$, то ответ $\frac{1}{2}$. Иначе увеличиваем знаменатель на 1.
3) Пусть знаменатель равен k. Находим число m так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{m}{k} < A < \frac{x}{y} < B < \frac{m+1}{k}$.
4) В этом случае увеличиваем знаменатель на 1.
5) Повторяем пункты 2) и 3) до тех пор, пока не получим неравенство $A < \frac{m}{k} < B$. В этом случае ответ $\frac{x}{y} = \frac{m}{k}$.

Пункт 5.

$\frac{m}{2019} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{2020}, \ \ 0 < m < 2019.$

$m = 1 \qquad \frac{1}{2019} < \frac{k_1}{n} < \frac{2}{2020}$

$m = 2 \qquad \frac{2}{2019} < \frac{k_2}{n} < \frac{3}{2020}$

$m = 3 \qquad \frac{3}{2019} < \frac{k_3}{n} < \frac{4}{2020}$

$\ldots$

$m = 2017 \qquad \frac{2017}{2019} < \frac{k_{2017}}{n} < \frac{2018}{2020}$

$m = 2018 \qquad \frac{2018}{2019} < \frac{k_{2018}}{n} < \frac{2019}{2020}$

Представим исходное неравенство в виде

$\frac{2m}{4038} < \frac{k_m}{n} < \frac{2m+2}{4040}$.

Возьмем $k_m = 2m+1, n = 4039$. Докажем, что будет верным неравенство

$$\frac{2m}{4038} < \frac{2m+1}{4039} < \frac{2m+2}{4040} \qquad (1)$$

В самом деле

$$\frac{2m}{4038} - \frac{2m+1}{4039} = \frac{2m \cdot 4039 - (2m+1) \cdot 4038}{4038 \cdot 4039} = \frac{2m - 4038}{4038 \cdot 4039} = \frac{m - 2019}{2019 \cdot 4039} < 0;$$

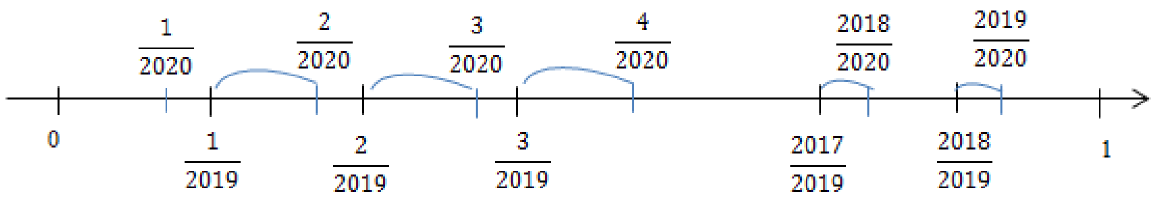
$$\frac{2m+1}{4039}-\frac{2m+2}{4040}=\frac{(2m+1)\cdot 4040-(2m+2)\cdot 4039}{4039\cdot 4040}=\frac{2m-4038}{4039\cdot 4040}=\frac{m-2019}{2020\cdot 4039}<0.$$

Таким образом, получили $\frac{k_m}{n}=\frac{2m+1}{4039}$. Следовательно $n=4039$.

Пункт 6.

Усложним теперь условие пункта 5. Пусть требуется найти наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее следующему условию: для любого целого числа m, где $0<m<2019$, существует целое число k_m такое, что $\frac{m}{2019}<\frac{k_m}{n}<\frac{m+1}{2020}$, причем разность $\frac{k_m}{n}-\frac{m}{2019}$ постоянна при всех m.

Отметим на числовой прямой промежутки, заданные исходным неравенством.



Отрезок $\left[\frac{1}{2019};1\right]$ разбит на 2018 равных частей длиной $\frac{1}{2019}$.

Нужно указать наименьшее n так, чтобы дроби $\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n},\ldots,\frac{k_{2018}}{n}$ принадлежали выделенным на рисунке промежуткам и находились на одинаковом расстоянии от левой границы.

Очевидно, $n>2019$.

Длина последнего промежутка равна $\frac{1}{2019\cdot 2020}=\frac{1}{4078380}=\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 101\cdot 673}$

Длина предпоследнего промежутка равна $\frac{2}{2019\cdot 2020}=\frac{2}{4078380}$, предыдущего $\frac{3}{4078380}$, ..., первого $\frac{2018}{4078380}$.

Найдём число a с наименьшим знаменателем такое, что $\frac{2018}{2019}<a<\frac{2019}{2020}$.

Тогда получим $\frac{k_{2018}}{n}=a$.

Чтобы получить остальные дроби, нужно от a отнимать $\frac{1}{2019}$ 2017 раз.

$$-\frac{2019}{2020}<-a<-\frac{2018}{2019};$$

$$\frac{1}{2020}<1-a<\frac{1}{2019}.$$

Очевидно имеет место неравенство $\frac{2}{4040}<\frac{2}{4039}<\frac{2}{4038}$.

Тогда $1-a=\frac{2}{4039}$; $\quad a=1-\frac{2}{4039}=\frac{4037}{4039}$.

Таким образом, $\frac{k_{2018}}{n}=\frac{4037}{4039}=\frac{4037\cdot 2019}{4039\cdot 2019}=\frac{8150703}{8154741}$.

$\frac{k_{2017}}{n}=\frac{4037}{4039}-\frac{1}{2019}=\frac{8146664}{8154741}$.

$\frac{k_{2016}}{n}=\frac{4037}{4039}-2\cdot\frac{1}{2019}=\frac{812625}{8154741}$.

$\frac{k_{2018-i}}{n}=\frac{4037}{4039}-\frac{i\cdot 1}{2019}, \quad i=\overline{1,\,2017}$.

Таким образом, $n=8154741$. Однако этот знаменатель не является наименьшим. Из примера видно, что когда мы отнимаем у найденной дроби a $\frac{1}{2019}$, получаем дроби с большим знаменателем. Чтобы найти наименьшее n, нужно найти такое $\frac{p}{q}=a\in(\frac{1}{2020};\frac{1}{2019})$, чтобы НОК (q, 2019) был наименьшим.

Очевидно, имеет место неравенство

$\frac{1r}{2020r}<\frac{r}{2019r+s}<\frac{r}{2019r}$, где $1\le s\le r-1$.

Значит нужно найти числа $r\ge 2$ и $1\le s\le r-1$ так, чтобы НОК (2019r +s, 2019) был наименьшим. Это значение НОК и будет искомое n. 2019=3·673. НОК будет наименьшим, если у чисел НОД наибольший.

Пусть $2019\mathrm{r}+\mathrm{s}=673h$ (т.к. 673 – наибольший из делителей числа 2019).

$3\cdot 673r+\mathrm{s}=673h$

$673(h-3r)=s, \quad s=1,2,\dots r-1$.

Пусть $h-3r=1$, тогда $s=673$. Возьмем $r=674$;

$h=3\cdot 674+1=2023$

$2019\mathrm{r}+\mathrm{s}=1361479$.

$$\frac{674}{2020\cdot 674}<\frac{674}{1361479}<\frac{674}{2019\cdot 674}$$

$$\frac{674}{1361480}<\frac{674}{1361479}<\frac{674}{1360806}$$

$$1-a=\frac{674}{1361479}.$$

$$a=1-\frac{674}{1361479}=\frac{1360805}{1361479}=\frac{k_{2018}}{n}.$$

$$\frac{k_{2017}}{n}=\frac{k_{2018}}{n}-\frac{1}{2019}=\frac{1360805}{2023\cdot 673}-\frac{1}{3\cdot 673}=\frac{4080392}{4084437}$$

$$\frac{k_{2016}}{n}=\frac{k_{2018}}{n}-\frac{2}{2019}=\frac{4078369}{4084437}$$

$$\frac{k_i}{n}=\frac{k_{2018}}{n}-\frac{2018-i}{2019}=\frac{4080392\ -2023(2018-i)}{4084437},i=\overline{1,2018}.$$

Таким образом, наименьший знаменатель $n = 4084437$.

Пункт 7.

Хотя графический метод не всегда бывает удобным и точным, но в некоторых ситуациях может значительно упростить вычисления.

Пусть в пункте 3 нужно найти дробь со знаменателем 29, такую, что $\frac{10}{39} < \frac{x}{y} < \frac{11}{38}$.

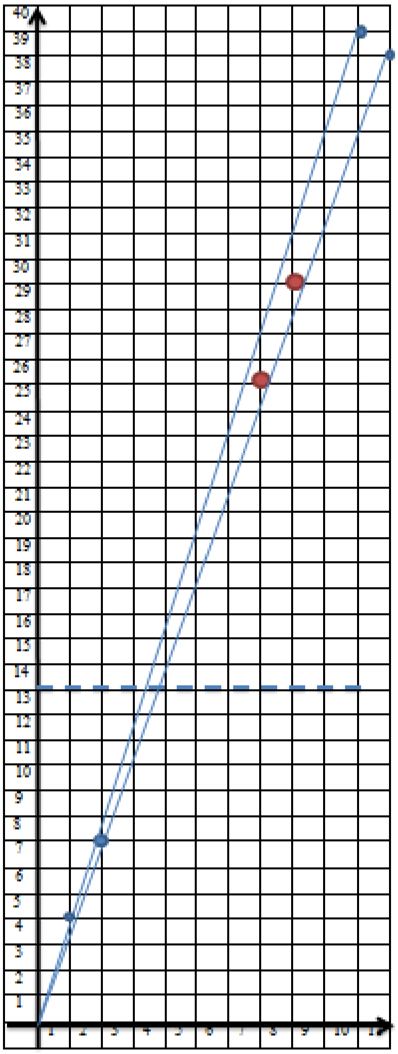
Проведём лучи через начало координат и точки с координатами (10;39) и (11;38). Получим угол. Неравенству $\frac{10}{39} < \frac{x}{y} < \frac{11}{38}$ удовлетворяют все дроби $\frac{x}{y}$, для которых точки с целочисленными координатами (x;y) лежат внутри этого угла.

Например, со знаменателем 29 будет единственная дробь $\frac{8}{29}$. Со знаменателем 25 - $\frac{7}{25}$. Со знаменателем 13 – нет дробей, удовлетворяющих неравенству $\frac{10}{39} < \frac{x}{13} < \frac{11}{38}$.

Дробь с наименьшим знаменателем следует искать поближе к началу координат. Если на рисунке плохо видно, лежит ли какая-то точка с целыми координатами (x,y) внутри угла, можно посмотреть на точку с координатами (kx,ky), которая соответствует той же дроби после сокращения, но лежит дальше от начала координат и, следовательно, там угол шире. Если все же остались сомнения, её можно проверить аналитически, то есть сравнить данную дробь $\frac{x}{y}$ с A и B.

По крайней мере это значительно сузит перебор. Для неравенства $\frac{10}{39} < \frac{x}{y} < \frac{11}{38}$ нужно проверить дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{7}$.

Зато совершенно очевидно, что дроби $\frac{3}{11}, \frac{4}{15}, \frac{5}{18}, \frac{5}{19}, \frac{6}{21}, \frac{6}{22}$ и др. удовлетворяют неравенству.



Предложенный в пунктах 1 и 2 метод поиска ближайшей дроби большей заданной можно использовать для упорядочения по возрастанию всех правильных дробей с однозначными (или двузначными) знаменателями. Самой маленькой является дробь $\frac{1}{9}$. Найдем ближайшую большею ее.

Пусть $\frac{a}{b}$ – искомая дробь, большая $\frac{1}{9}$, тогда разность $\frac{a}{b} - \frac{1}{9}$ должна быть наименьшей дробью.

$\frac{a}{b} - \frac{1}{9} = \frac{9a-b}{9b}$, значит $9a - b = 1$, а $9b$ должно быть наибольшим.

$a = \frac{b+1}{9}$. Подставляем вместо b числа 9, 8, 7 и т.д. пока не получим целое a. Получаем $a = 1$, то $b = 8$. Значит $\frac{1}{8}$ – искомая дробь. Далее найдем ближайшую дробь большую $\frac{1}{8}$ и т.д.

Отсортировать таким образом все правильные дроби с двузначными знаменателями тоже можно, но это более громоздкая задача. Можно написать программу на Паскале, которая выдаст нам отсортированный массив. Алгоритм программы следующий. Сначала заполняем массив дробями с числителями 1: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$, …, $\frac{1}{2}$. Затем начинаем рассматривать дроби с числителем 2 и вставляем их в нужные места имеющегося массива и т.д.

Текст программы

```
program drobi_odnoznacgh;
Uses crt;
Var a,b,j,k,n:integer;
    v:array [1..100] of real;  {drobi}
    x:array [1..100] of integer; {cgisliitel}
    y:array [1..100] of integer; {znamenatel}
Begin
 Clrscr;
 n:=8;
 for j:=9 downto 2 do begin v[10-j]:=1/j; x[10-j]:=1; y[10-j]:=j end;
 for a:=2 to 9 do
  for b:=a+1 to 9 do
   begin
    if a/b<v[1] then begin for j:=n downto 1 do begin v[n+1]:=v[n]; x[n+1]:=x[n];
y[n+1]:=y[n] end;
                    v[1]:=a/b; x[1]:=a; y[1]:=b; n:=n+1
                  end;
    if a/b>v[n] then begin v[n+1]:=a/b; x[n+1]:=a; y[n+1]:=b; n:=n+1 end;
    for j:=1 to n do if (a/b>v[j])and(a/b<v[j+1])
                   then begin for k:=n downto j+1 do begin v[k+1]:=v[k]; x[k+1]:=x[k];
y[k+1]:=y[k] end;
                          v[j+1]:=a/b; x[j+1]:=a; y[j+1]:=b; n:=n+1
                    end
   end;
  for j:=1 to n do write ('  ',x[j],'/',y[j]);
 readkey;
End.
```

Программа выводит следующий результат

1/9 1/8 1/7 1/6 1/5 2/9 1/4 2/7 1/3 3/8 2/5 3/7 4/9 1/2 5/9 4/7 3/5 5/8 2/3 5/7 3/4 7/9 4/5 5/6 6/7 7/8 8/9

Следующая программа сортирует все правильные дроби с одно- и двузначными знаменателями, выводит по запросу ближайших соседей дроби и выводит все дроби между двумя заданными дробями.

```
program drobi_dvuznacgh;
Uses crt;
Var a,b,a1,b1,a2,b2,j,k,n:integer;
    v:array [1..3005] of real;  {drobi}
    x:array [1..3005] of integer; {cgisliitel}
    y:array [1..3005] of integer; {znamenatel}
Begin
 Clrscr;
 n:=98;
 for j:=99 downto 2 do begin v[100-j]:=1/j; x[100-j]:=1; y[100-j]:=j end;
 for a:=2 to 98 do
  for b:=a+1 to 99 do
   begin
    if a/b<v[1] then begin for j:=n downto 1 do
                  begin v[n+1]:=v[n]; x[n+1]:=x[n]; y[n+1]:=y[n] end;
                   v[1]:=a/b; x[1]:=a; y[1]:=b; n:=n+1
                 end else
    if a/b>v[n] then begin v[n+1]:=a/b; x[n+1]:=a; y[n+1]:=b; n:=n+1 end else
    for j:=1 to n do if (a/b>v[j])and(a/b<v[j+1]) then
                  begin for k:=n downto j+1 do
                   begin v[k+1]:=v[k]; x[k+1]:=x[k]; y[k+1]:=y[k] end;
                    v[j+1]:=a/b; x[j+1]:=a; y[j+1]:=b; n:=n+1
                  end
   end;
writeln('Najdyom blijayshih sosedej');
write('Vvedite chislitel drobi a='); readln(a);
write('Vvedite znamenatel drobi b='); readln(b);
for j:=1 to n do if v[j]=a/b
  then writeln(' ',x[j-1],'/',y[j-1],'<',a,'/',b,'<',x[j+1],'/',y[j+1]);
writeln('Najdyom drobi mejdu dvumya PRAVILNYMI drobyami a1/b1<a2/b2');
write('Vvedite chislitel drobi a1='); readln(a1);
write('Vvedite znamenatel drobi b1='); readln(b1);
write('Vvedite chislitel drobi a2='); readln(a2);
write('Vvedite znamenatel drobi b2='); readln(b2);
for j:=1 to n do if (v[j]>a1/b1)and(v[j]<a2/b2)
  then write('  ',x[j],'/',y[j]);
 readkey;
End.
```

Результат работы программы

'Najdyom blijayshih sosedej
Vvedite chislitel drobi a=3
Vvedite znamenatel drobi b=7
41/96<3/7<40/93
Najdyom drobi mejdu dvumya PRAVILNYMI drobyami a1/b1<a2/b2
Vvedite chislitel drobi a1=1
Vvedite znamenatel drobi b1=14
Vvedite chislitel drobi a2=1
Vvedite znamenatel drobi b2=13
7/97 6/83 5/69 4/55 7/96 3/41 5/68 7/95 2/27 7/94 5/67 3/40 7/93 5/53 5/66 6/79 7/92

Заключение

Таким образом, можно подвести итоги:

Решены все пункты задачи, рассмотрены несколько способов исследования, созданы программы в Pascal ABC для более быстрого поиска дробей.

1) В пункте 1 получен ответ на поставленный вопрос: $\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9}$.

Все рассуждения представлены на стр. 5

2) В пункте 2 получен ответ на поставленный вопрос: $\frac{41}{96} < \frac{3}{7} < \frac{40}{93}$ и $\frac{53}{93} < \frac{4}{7} < \frac{55}{96}$.

Предложен графический метод решения.

Все рассуждения представлены на 5 стр. – 7 стр.

3) В пункте 3 получен ответ на поставленный вопрос: дробь с минимальным знаменателем $\frac{16}{7}$.

Все рассуждения представлены на 7 стр.

4) В пункте 4 получен ответ на поставленный вопрос: дробь с минимальным знаменателем $\frac{13}{4}$.

Предложен алгоритм решения.

Все рассуждения представлены на 7 стр. – 8 стр.

5) В пункте 5 найдено наименьшее n, удовлетворяющее предложенному условию: n = 4084437.

Результаты представлены на стр. 8 стр. – 10 стр.

6) В пункте 6 предложен и описан графический метод решения, а также программы в PascalABC.

Результаты представлены на стр. 10 стр. – 14 стр.

Список использованных источников

1. [Электронныйресурс]://https://uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html. – Дата доступа: 11.02.2020.