Упраўленне адукацыі Ваўкавыскага райвыканкама
Дзяржаўная ўстанова адукацыі
«Субацкі навучальна-педагагічны комплекс дзіцячы сад – сярэдняя школа»

Секцыя “Матэматыка”

Няплотная растаноўка пентаміна

Аўтар работы:
Шчурскі Ягор Віктаравіч,
вучань X класа
Навуковы кіраўнік:
Клачкова Таццяна Уладзіміраўна,
настаўнік матэматыкі

Субачы
2020

ЗМЕСТ

УВОДЗІНЫ

Рыхтуючыся до прадметнай алімпіяды мы не раз сустракаемся з задачамі, дзе патрабуецца вызначыць вынік некаторай гульні. Знакаміты аўтар кніг, прысвечаных займальнай матэматыкі Мартын Гарнер выказаўся, што … “матэматыка прадстаўляе сабой гульню, у якую мы гуляем з акружаючым светам, з Сусветам. Самыя лепшыя матэматыкі і самыя добрыя выкладчыкі – гэта людзі, якія цудоўна разбіраюцца ў яе правілах, а таксама атрымліваюць задавальненне ад самаго працэса гульні” [1] Дзіцячая цікаўнасць да гульняў і галаваломак на адгадванне часам прабуждае ў людзей жаданне цалкам пасвяціць сябе матэматыцы, фізіцы, біялогіі, каб “адгадваць”яшчэ больш сур’ёзныя навуковыя загадкі і праблемы. Лепшыя адгадкі ствараюць свае матэматычныя тэорыі, расшыфроўваюць старажытныя папірусы – і адкрываюць новыя законы прыроды. Сапраўды, гульні па адгадванню развіваюць творчыя здольнасці чалавека, яго лагічнае мысленне, вучаць ставіць пытанні і знаходзіць адказы [2] А уменні разважаць і граматна выбраць стратэгію дазваляе дасягнуць найбольш спрыяльнага выніку ў дзейнасці. Таму тэма матэматычных гульняў і распрацоўкістратэгіі не губляе сваёй актуальнасці.

З задачамі на распрацоўку стратэгіі гульні мы сустракаемся і на турніры юных матэматыкаў. Адна з іх выклікала ў мяне цікавасць.

Мэта даследвання: вызначыць найменьшую колькасць фігурак віда Т неабходных для дасягнення “дрэннай растаноўкі” на клетчатай дошцы 6×6 , 7×7 і $m\times n$, даследваць гульню двух ігракоў на дошцы $m\times n$ пры ўмове выканання правіла: кожны па чарзе бярэ фігурку пентаміна.

Перад сабой я паставіў наступныя **задачы:**

1.Вызначыць максімальную колькасць фігурак віда Т, якімі можна дасягнуць “дрэннай растаноўкі” на дошках 6×6 , 7×7

2. Даследваць агульную задачу аб максімальнай растаноўцы пентаміна на дошках $m\times n$

3. Даследваць гульню двух ігракоў на дошцы $m\times n$ пры ўмове выканання правіла: кожны па чарзе бярэ фігурку пентаміна.

Аб’ект даследвання: прамавугольнікі $m\times n$, дзе m і n цэлыя лікі, фігуркі пентаміна.

Прадмет даследвання: магчымасці выіграша ў гульні, стратэгіі гульні.

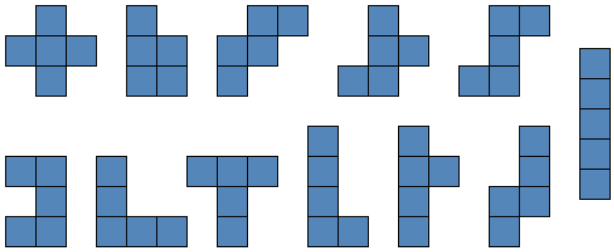
Метады даследвання: аналіз літаратуры па тэме, аналіз магчымасцей выіграша.

Гіпотэза: уменні распрацоўваць стратэгію дазваляюць чалавеку спланаваць свае дзеянні так, каб атрымаць максімальна жаданы вынік.

Практычная значымасць: уменні распрацоўваць стратэгіі дапамагаюць у рашэнні практычных задач.

1.Гульня пентаміна, яе сутнасць

Пентаміна уяўляе сабой паліяміна, якое створана з пяці квадратаў.



Гуляюць у пентаміна наступным чынам. Двое з гуляючых садзяцца насупраць адзін аднаго за пустой шахматнай дошкай, маючы пад рукой поўны комплекс фігур пентаміна. Той каму трэба хадзіць першаму, бярэ адну з 12 фігур і размяшчае яе на дошцы так, каб закрыць 5 клетак. Другі ігрок бярэ адну з 11 фігурак і размяшчае яе так, каб яна пакрыла 5 клетак. Гульня ідзе да тых пор, пакуль адзін з ігракоў не зможа зрабіць наступны ход таму што застаўшыяся фігуры не умяшчаюцца на свабодныя клеткі, або ўсе фігуры ужо выкарыстаны. Ігрок не здолейшы зрабіць ход лічыцца прайграўшым. Існуюць іншыя варыянты гульні: 1)у кожнага ўдзельніка гульні свій набор пентаміна; 2) гульня з заранёва выбранымі фігурамі.

2. Задача на няплотную растаноўку пентаміна

А) На клетчатай дошцы 6×6 уздоўж лініі клетак растаўляюцца фігуркі віда літары Т так, каб яны не накладваліся адна на адну (датыкаліся вуглямі або старанамі фігуркі могуць, а таксама іх можна паварочкаць на $90°, 180°$ або $270°$). Растаноўку фігур назавем дрэннай, калі на дошку нельга паставіць ніякай новай фігуркі без парушэння указаных умоў. Якой найменьшай колькасцю фігурак можна дасягнуць дрэннай іх растаноўкі?

Б) Якой найменьшай колькасцю фігурак вы зможаце дасягнуць дрэннай іх растаноўкі на дошке 7×7 .

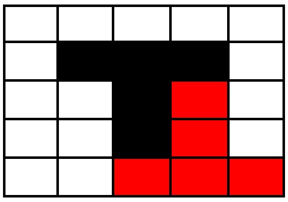
В) Даследуйце агульную задачу аб максімальнай растаноўке фігурак тыпа “пентаміна” на прамавугольных дошках $\mathrm{m}\ \times n$ (ацаніце колькасныя характарыстыкі такіх упаковак, магчымыя метады і алгарытмы упаковак і г д)

Г) Два іграка гуляюць на дошцы $\mathrm{m}\times n$ па наступным правілам: кожны з іх па чарзе выстаўляе, калі магчыма на дошку пентаміна. Хто выйгрывае пры правільнай гульні – пачынаючы або яго сапернік? Даследуйце гульню пры розных значэннях m і n.

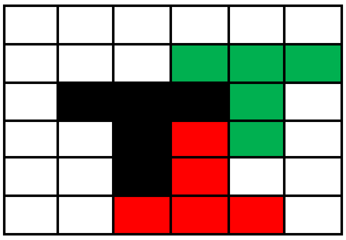
Д) Прапануйце сваі накірункі або абагульненні да гэтай задачы і даследуйце іх.

2.1 Вызначэнне максімальнай колькасці Т-пентаміна для стварэння “Дрэннай растаноўкі” на дошках 6×6 і 7×7

А)У квадрате 5×5 магчыма размясціць дзве фігуркі пентаміна віда Т. Гэта магчыма бачыць на малюнку.

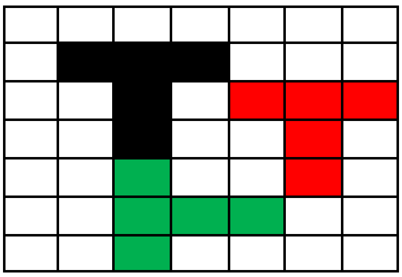


Калі павялічыць квадрат на адзін сталбец і адзін радок, то магчыма размясціць яшчэ адну фігурку.



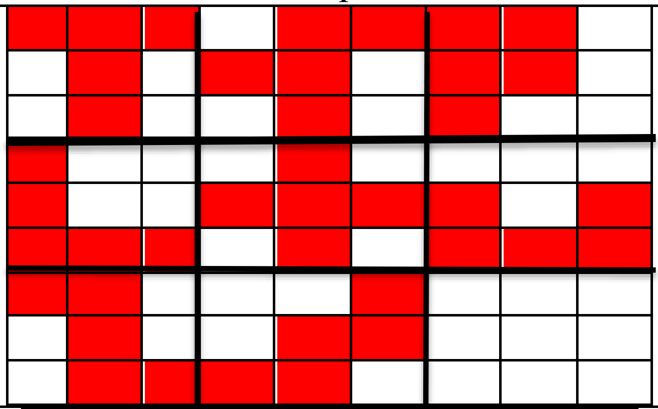
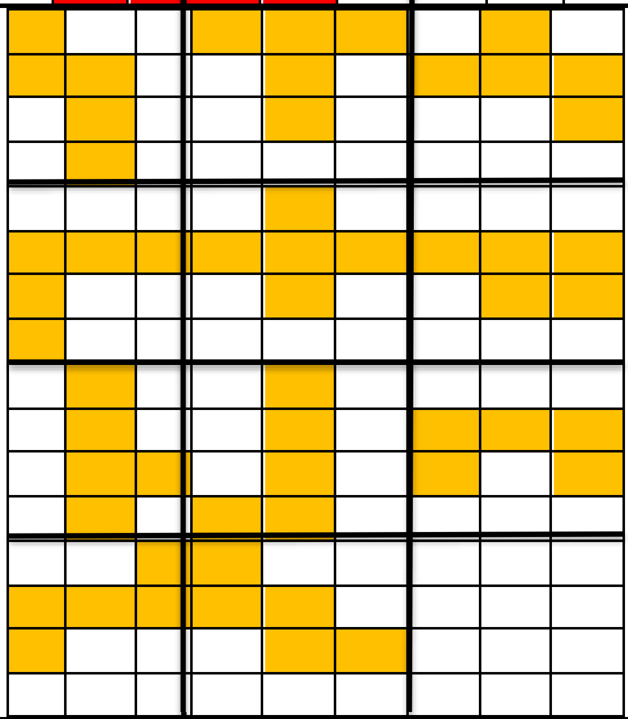
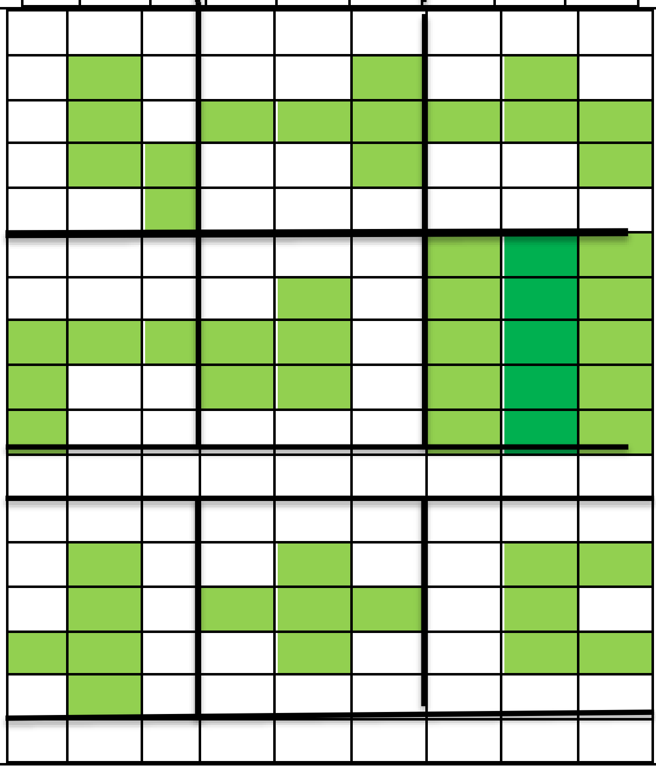
Такім чынам, магчыма выкарыстанне трох фігурак пентаміна віда Т.

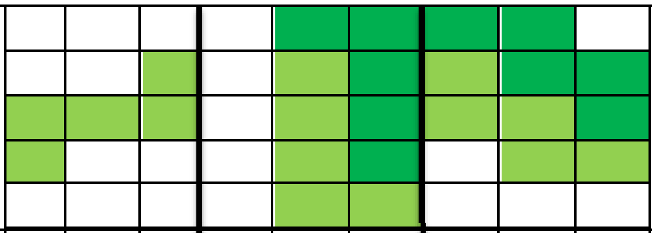
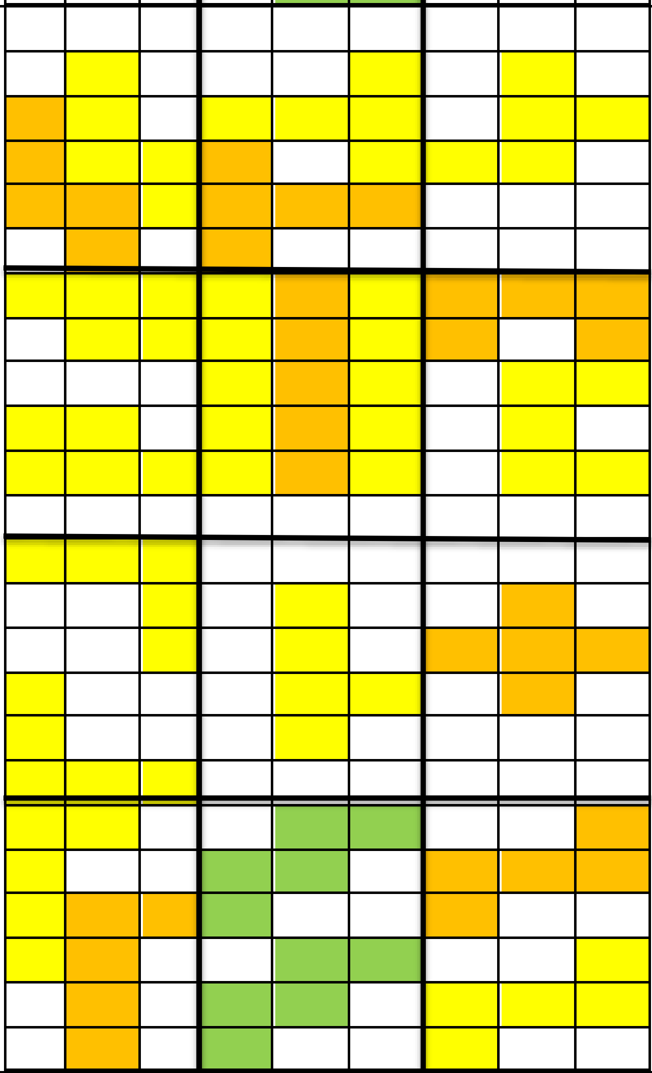
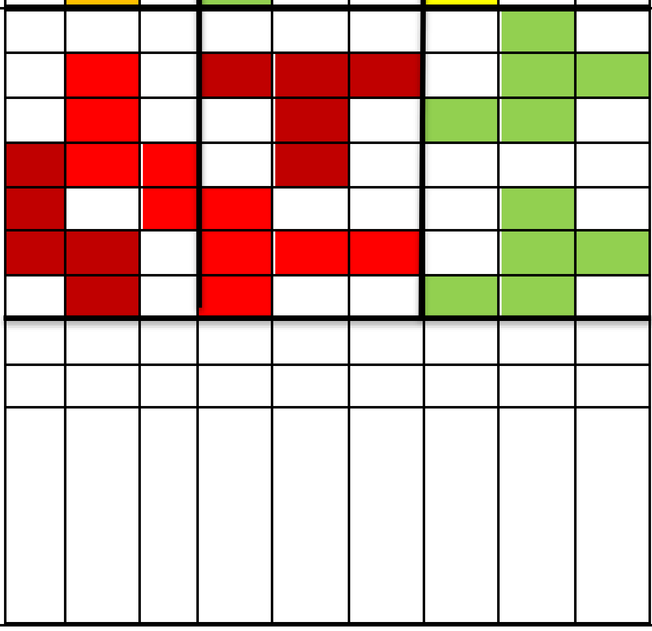
Б) У квадрате 7×7 таксама магчыма размясціць тры фігуркі пентаміна віда Т.

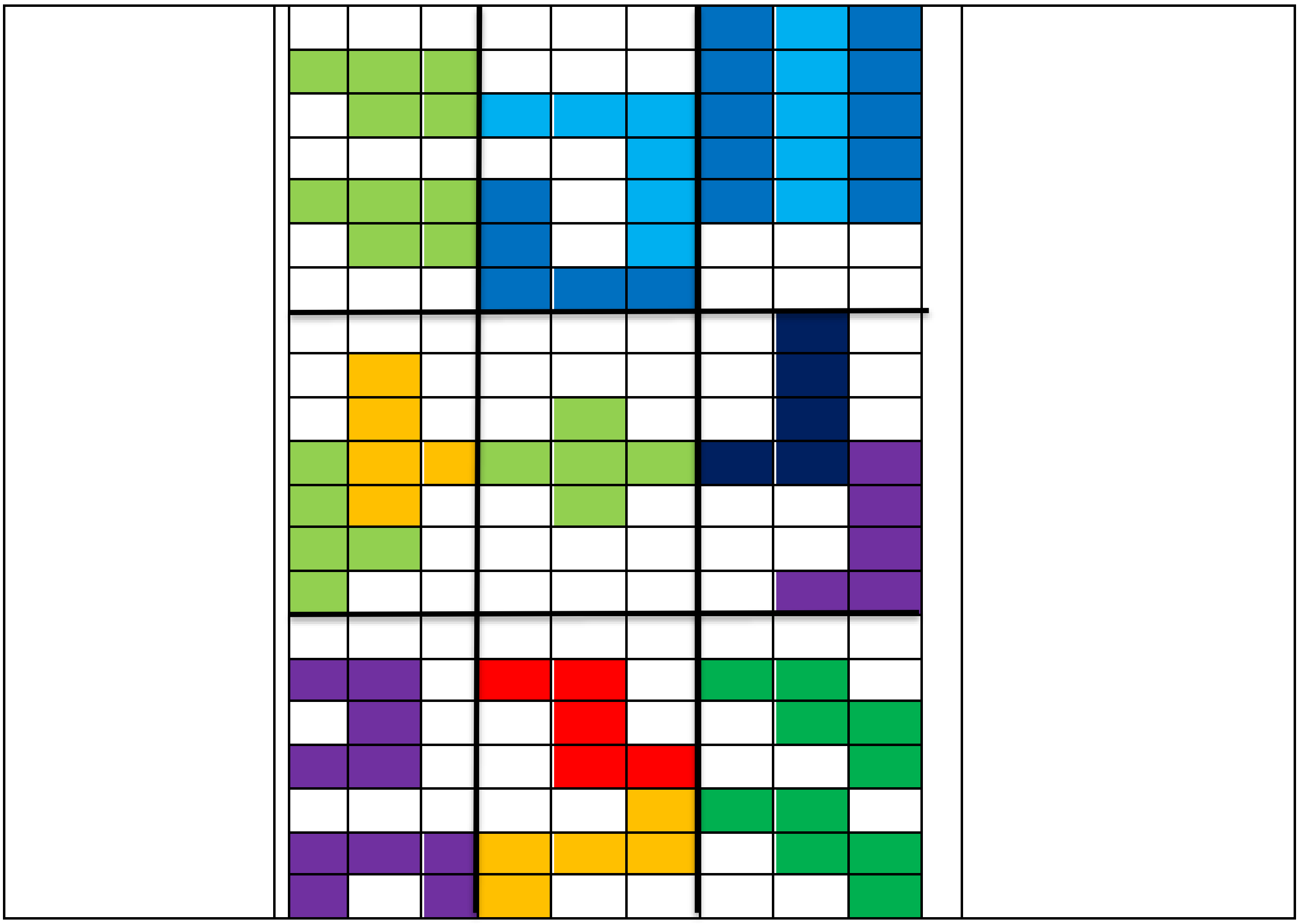


2.2 Стварэнне дрэннай расстаноўкі на дошках $\mathrm{m} \times n$

В) Разгледзім магчымасць стварэння дрэннай растаноўкі рознымі фігуркамі пентаміна. Каб зрабіць першы ход, неабходна, каб дошка мела памеры не менш чым 3×3. Прааналізуем усе прамавугольныя дошкі, плошча якіх не превышае 36 клетак.

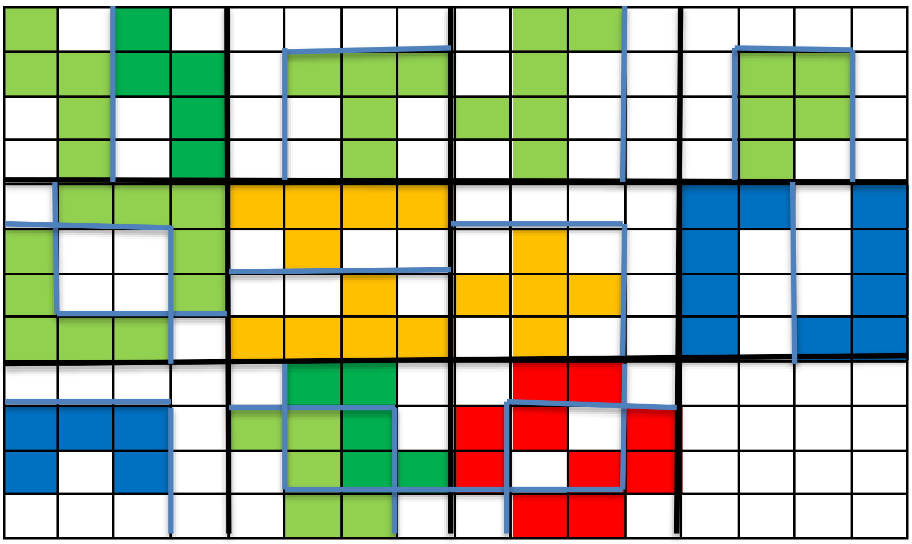
Памеры дошкі	Адлюстраванне	Колькасць фігурак
3× 3		Відавочна, дастаткова адной фігуркі
3× 4		Палоску 5× 5 выкарыстаць немагчыма. Для стварэння дрэннай растаноўкі дастаткова адной фігуркі.
3× 5		Усе фігуркі, акрамя трох выкарыстоўваюцца адзін раз. Дзве апошнія фігуркі ствараюць дрэнную растаноўку. Колькасць фігурак- палосак залежыць ад таго ці кратна адна са старон прамавугольніка 5.

		
3×6		Для атрымання дрэннай растаноўкі патрэбна ад 1 да 3 фігурак пентаміна
3×7		Амаль усяду патрэбны дзве фігуркі для стварэння дрэннай растаноўкі. Выключэнне складае толькі крыж і палоскі.

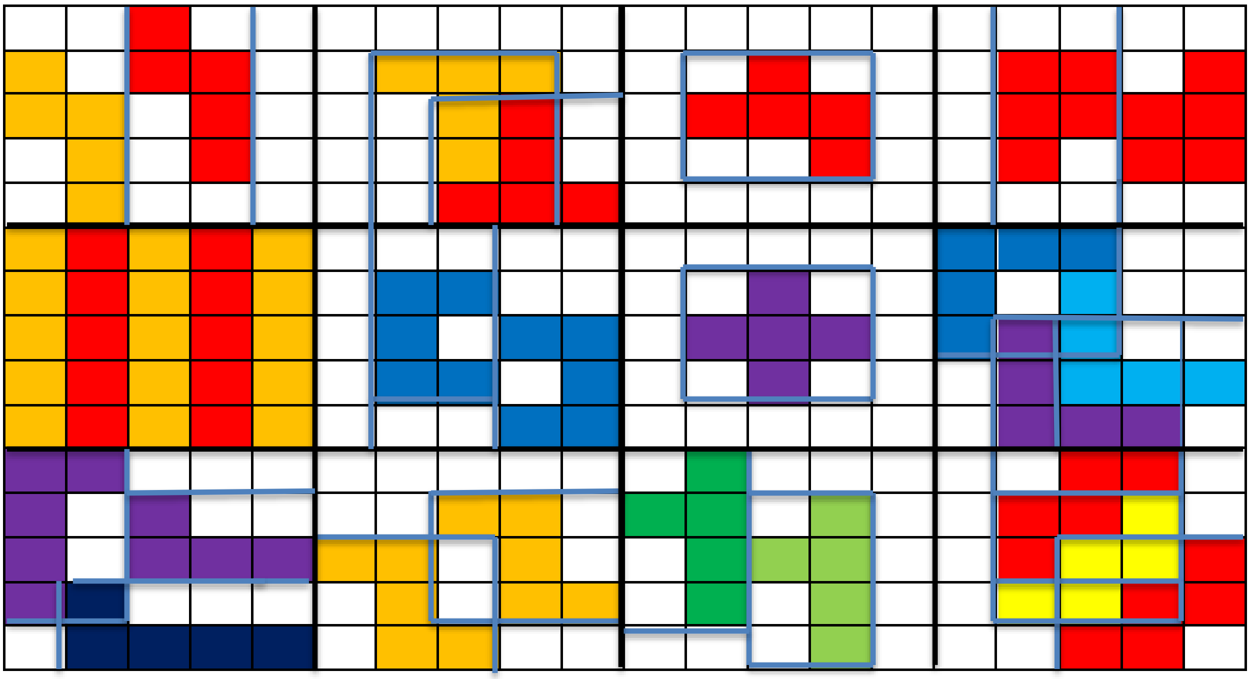


Пры павелічэнні плошчы прамавугольнікаў узнікае магчымасць разбіення іх на меньшыя прамавугольнікі.

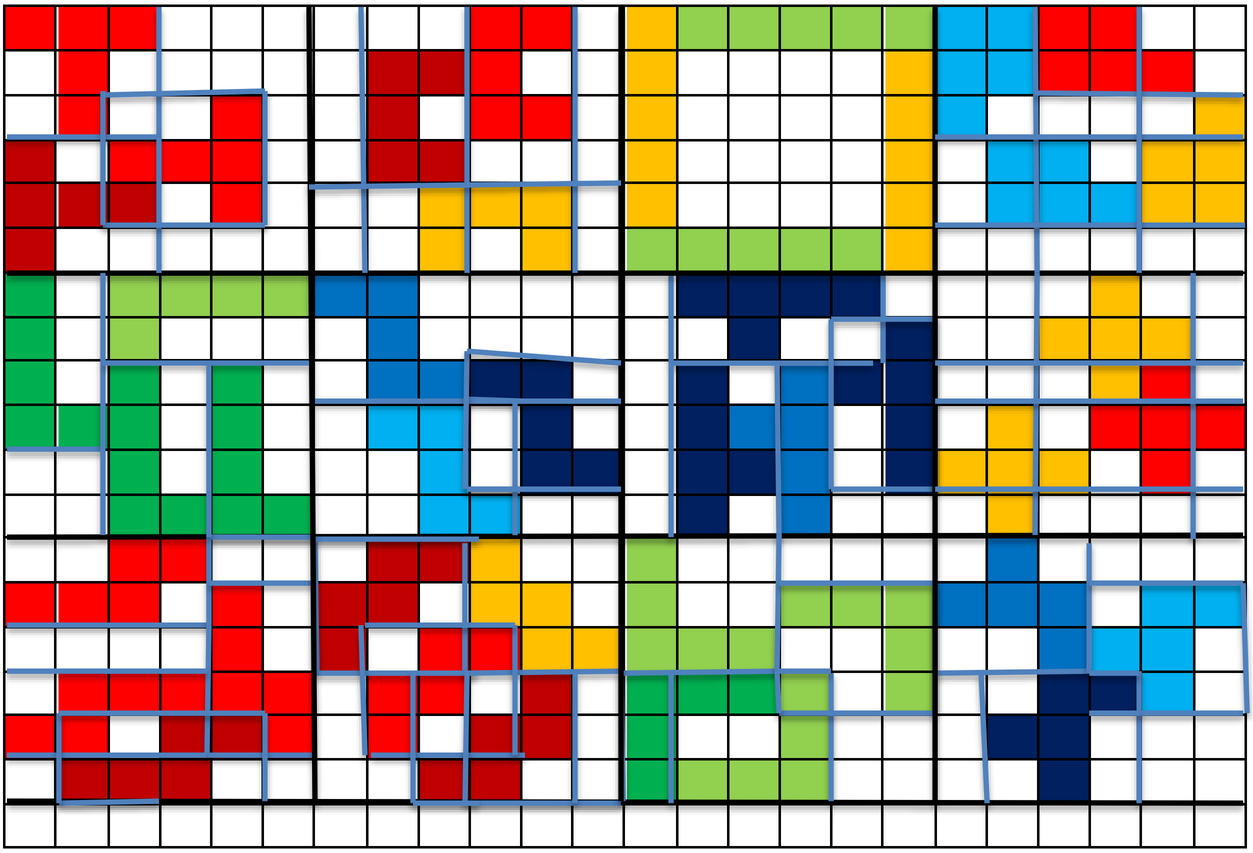
Разгледзім выпадкі калі m = n. Гэта будуць квадраты 4×4; 5×5, 6×6.



Фігурка ў выглядзе палоскі пры такім памерах квадрата выкарыстоўвацца не можа. Разгледзім квадраты 5×5.



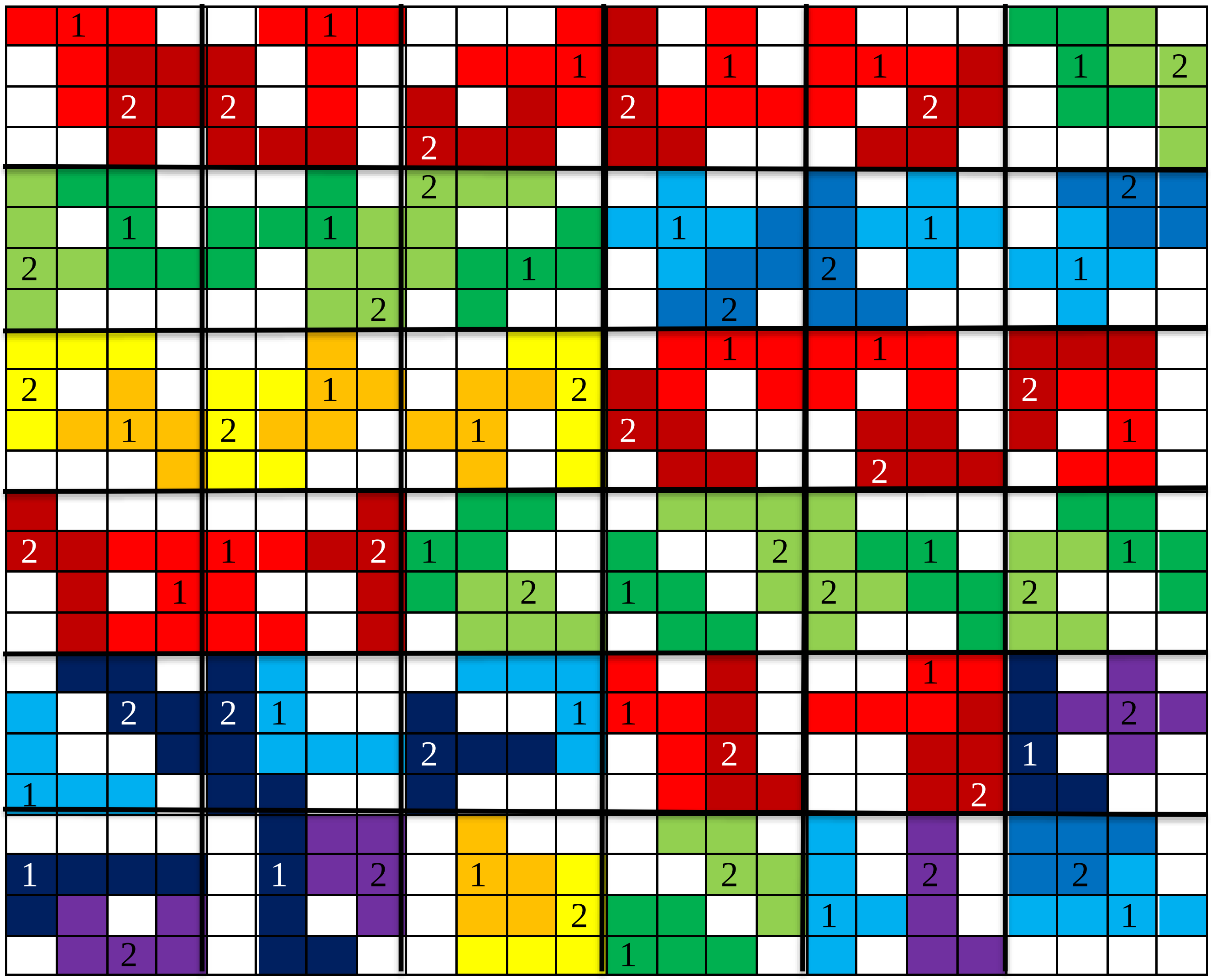
Разгледзім квадраты 6× 6.



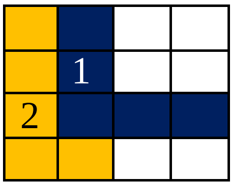
Такім чынам, каб на дошках памерамі m×n дасягнуць дрэннай растаноўкі, неабходна разбіць плоскасць на вобласці (перасякаючыяся і неперасякаючыяся) памерамі 3× 3 або 2× 4 у залежнасці ад фігуркі пентаміна, памясціўшы ў кожную вобласць фігурку. Пры гэтым застаўшыяся часткі павінны мець плошчу меньшую 8.

2.3 Вызначэнне стратэгіі двух ігракоў на дошках $m \times n$ для стварэння выігрышнай сітуацыі

Разгледзім стратэгіі гульні ў пентаміна з адным наборам фігур. Мінімальныя памеры дошкі, пры якіх гульня магчыма 3×3. Вынік такой гульні відавочны: на такой дошцы магчыма выканаць толькі адзін ход, а начыць выігрывае заўсёды першы. На дошцы 4×4 будзе выіграваць другі ігрок. Можна прывесці прыклады такой гульні.

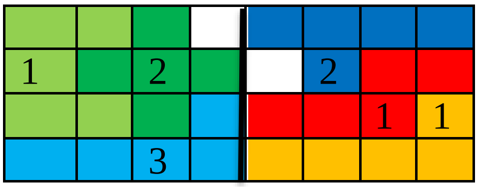


Як бачым, якую б фігурку не ўзяў першы ігрок і як бы не размясціў яе, другі ігрок зможа знайсці фігурку, каб забяспечыць сабе выігрыш. Цікава то, што ва ўсіх выпадках акрамя аднаго другі ігрок можа дабіцца выігрыша некалькімі спосабамі. У адным жа выпадку забяспечыць сабе выігрыш ігрок можа толькі адным ходам (спосабам).



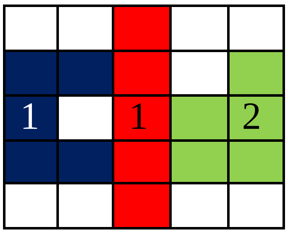
Ці магчыма першаму выйграць?

Прадставім варыянты выйгрыша першага іграка.



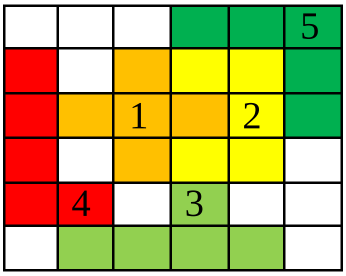
У другім выпадку чырвоная фігура разбівае поле на две часткі, чым першы ігрок забяспечвае сабе выйгрыш.

Разгледзім варыянты гульні на дошцы 5× 5. Прааналізаваўшы многія варыянты хадоў можна прысці да высновы, што існуе такі першы ход, які забяспечвае выйгрыш таму, хто яго зрабіў.



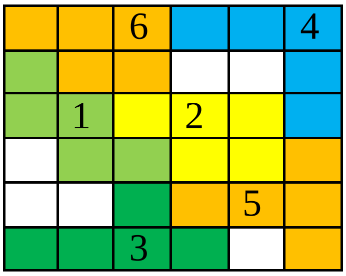
Палоска падзяляе квадрат на дзве раўнавялікія фігуры. На адну з палавін квадрата можна размясціць толькі адну фігуру плошчай 8 кв. адз. Таму апошні ход застаецца заўсёды першаму.

Па меры павелічэння даўжынь старон квадратаў гульня становіцца больш складанай. Разгледзім варыянты гульні на дошцы 6×6.



На малюнку нумарамі абазначаны хады. Ставячы першую фігурку ігрок імкнецца падзяліць фігуру на роўнавялікія часткі. Другі ігрок імкнецца перашкодзіць гэтаму. Пасля пятага хода не застаецца фігурак, якія можна пакласці на квадрат. У гульні выйграў першы ігрок.

Разгледзім іншы варыянт гульні.



Першы ігрок выкладае адну з найбольш склаланы фігур. Ход другога іграка падзяліў поле на раўнавялікія часткі. Гэта стварае сітуацыю, калі застанецца цотная колькасць хадоў. Значыць выігрыш другога іграка гарантаваны.

Гэтай стратэгіяй можна карыстацца і пры гульгі на большых досках.

3. Рашэнне практычных задач на распрацоўку стратэгіі.

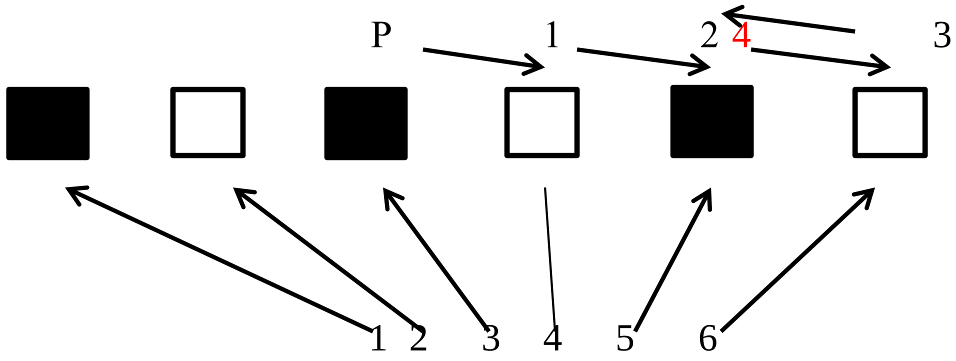
З разработкай стратэгій мы сустракаемся пры рашэнні задач. Разгледзім адну з іх.

У адным з 1000 акопаў, размешчаных у рад, схаваўся робат-пехацінец. Аўтаматычная пушка можа адным выстралам папасці ў любы акоп. У кожны прамежак паміж выстраламі робат (калі уцалеў) абавязкова перабягае ў суседні акоп (быць можа толькі што абстрэляны). Ці зможа пушка паразіць робата пры любых абставінах?

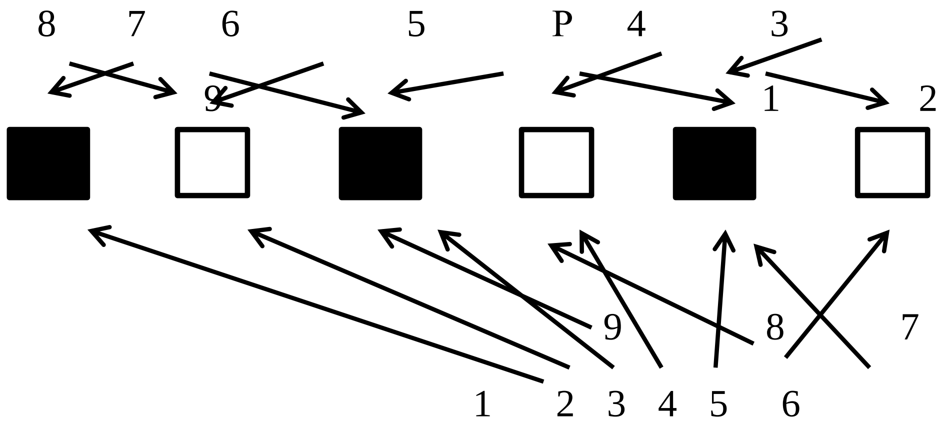
Рашэнне.

На першы погляд здаецца, што гэта немагчыма. Але гэта не так. Каб папасці ў робата пушка павінна прымяніць наступную тактыку: спачатку паслядоўна абстраляць усе акопы злева направа, зрабіўшы 1000 выстралаў, затым – справа налева (яшчэ 1000 выстралаў). У выніку робат будзе знішчан. Робат перабягае пасля выстрала ў суседні акоп. Калі раскрасіць акопы паперамена ў чорны і белы колер (так, што самы левы акоп будзе чорны) і калі перад першым выстралам робат сядзіць у якім- небудзь чорным акопе, то пры паслядоўным абстрэле акопаў злева направа ён не зможа размінуцца з пушкай і загіне. Калі ж робат хаваецца ў белым акопе, то пры абстрэле акопаў злева направа, то пушка яго не паразіць, але пры абратным абходзе акопаў яму не пазбяжаць.

Пакажам рашэнне на схеме для шасці акопаў. Няхай робат знаходзіцца ў трэцім акопе злева. Унізе будзем адзначаць выстралы пушкі, а зверху перамяшчэнне робата.



Робот загіне пры пятым выстрале пушкі.



Пасля дзевятага выстрала пушкі робат загіне.

ЗАКЛЮЧЭННЕ

Цікаўнасць да гульняў, адгадвання галаваломак развівае творчыя здольнасці вцчняў, іх лагічнае мвсленне, вучаць разважаць,граматна выбіраць стратэгію, рабіць высновы. У нашым жыцці мы сустракаемся з неабходнасцю рашаць задачы на выбар стратэгіі.

Пры даследванні былі атрыманы наступныя вынікі.

1.У квадрате 6×6 магчыма размясціць тры фігуркі пентаміна віда Т.

2. У квадрате 7×7 таксама магчыма размясціць тры фігуркі пентаміна віда Т.

3. Каб на дошках памерамі m×n дасягнуць дрэннай растаноўкі, неабходна разбіць плоскасць на вобласці (перасякаючыяся і неперасякаючыяся) памерамі 3× 3 або 2× 4 у залежнасці ад фігуркі пентаміна, памясціўшы ў кожную вобласць фігурку. Пры гэтым застаўшыяся часткі павінны мець плошчу меньшую 8.

4. Мінімальныя памеры дошкі, пры якіх гульня магчыма 3×3. Вынік такой гульні відавочны: на такой дошцы магчыма выканаць толькі адзін ход. На дошцы 4×4 будзе выйграваць другі ігрок. Выкарыстоўваючы стратэгію:

дзяленне дошкі на раўнавялікія фігуры, другі ігрок можа забяспечыць сабе выіграш.

5. Была разгледжана практычная задача на распрацоўку стратэгіі.

Можна сцвярджаць, што гіпотэза знайшла сваё падцвярлжзнне.

Спіс выкарыстаных крыніц

1.Матиевский С. В, Математическая культура Игры С. В. Матиевский, Учебное пособие – Калиненград Из-во КГУ., 2003 – 120 с

2.Гик Е. Я. Занимательные математические игры – Е. Я. Гик – 2-е изд перераб и доп – М. «Знание» 1987 – 160 с