Государственное учреждение образования
«Гимназия №6 г. Гродно»

Секция «Математика»

ТОЧКА ФЕРМА-ТОРРИЧЕЛЛИ

Автор работы:
Тарасенко Никита,
7 «Г» класс

Научный руководитель:
Селиверстова Анна Олеговна

Гродно, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена точке Ферма-Торричелли, а именно её построению, интересным свойствам и применению её в прикладной задаче.

Актуальность темы: точки Ферма-Торричелли используются в одноименной прикладной задаче, в физике, ну и конечно в геометрии.

Цель исследования: изучение точки Ферма-Торричелли и применение её в прикладной задаче.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- подобрать научную литературу;
- исследовать построение данной точки;
- рассмотреть проблему Штейнера;
- рассмотреть пример прикладной задачи;
- сделать заключение.

Объект исследования: точка Ферма-Торричелли.

Предмет исследования: свойства данной точки.

Методы исследования: поисковые, аналитические, практические.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Теоретические сведения

Определение 1 [1]. *Точка Ферма — точка плоскости, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной. Точку Ферма также иногда называют точкой Торричелли или точкой Ферма-Торричелли. Точка Ферма даёт решение проблемы Штейнера для вершин треугольника. В английской литературе точку Ферма также называют изогональным центром.*

На рис. 1 точкой Ферма будет являться точка S.

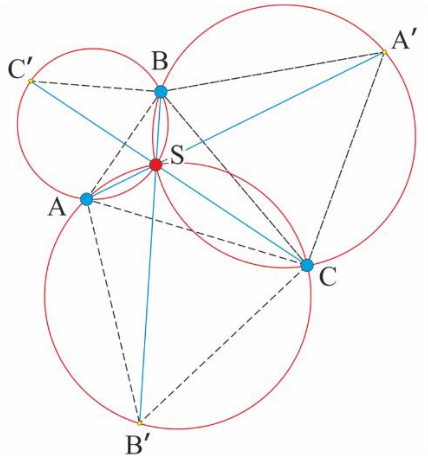


Рис.1

Основным свойством точки Ферма-Торричелли является

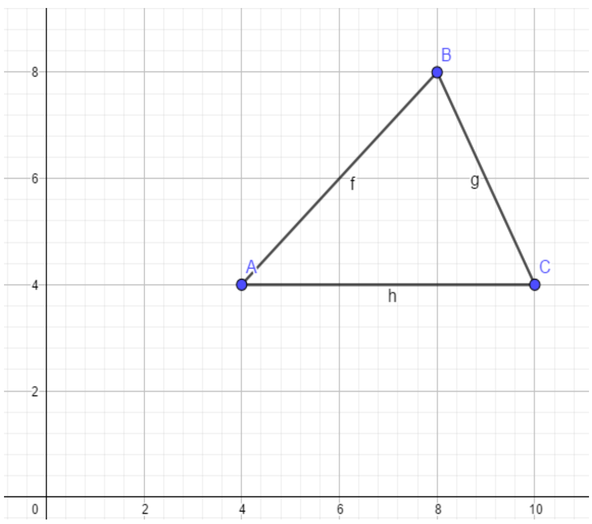
Теорема Лестера. *В любом разностороннем треугольнике две точки Ферма, центр девяти точек и центр описанной окружности лежат на одной окружности (окружности Лестера).*

В дальнейшем точку Ферма-Торричелли, для удобства, будем называть точкой Ферма.

Построение точки Ферма

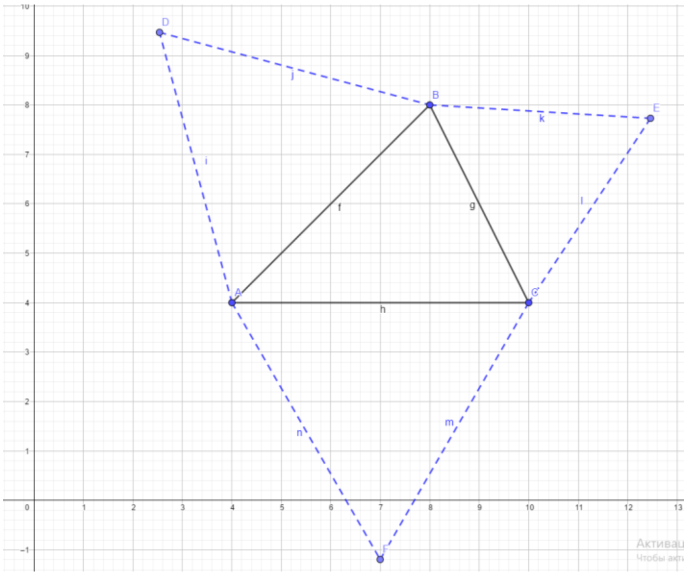
Все построения будем проводить в программе GeoGebra.

1. Построим треугольник ABC: A(4,4), B(8,8), C(10,4)



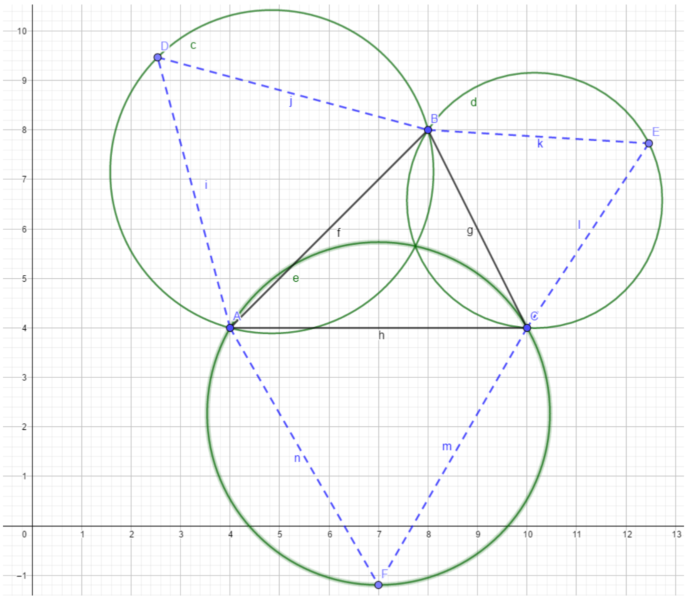
2. Достроим на сторонах ΔABC три равносторонних треугольника: ΔADB, ΔBEC, ΔAFC

Рис.2



3. Опишем около достроенных треугольников три окружности

Рис.3



4. Соединим точки D и C, B и F, E и A, и получим прямые DC, BF, EA, которые пересекаются в единственной точке G.

Рис.4

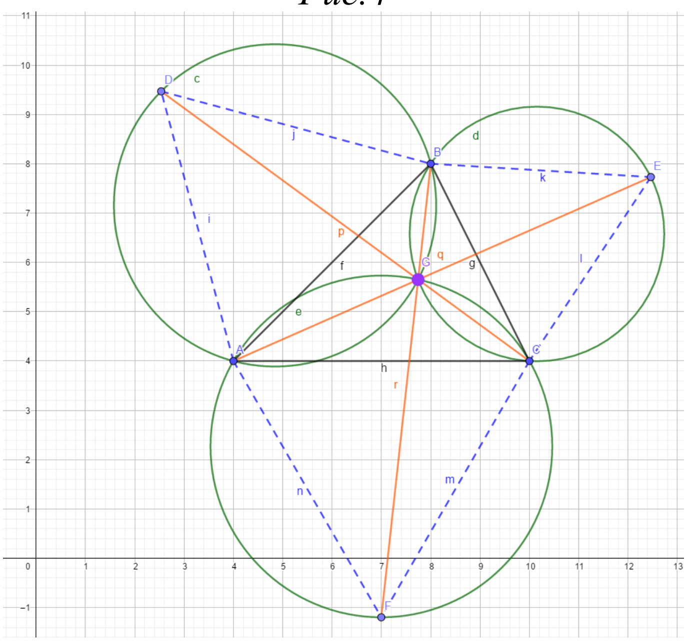


Рис.5

Если все углы ΔABC не превосходят 120°, то точка G лежит в данном треугольнике и является точкой Ферма. Тогда получаем, что углы между отрезками AG, BG, CG равны между собой и равны 120°, то есть $\angle AGB=\angle BGC=\angle CGA=120^{\circ}$.

Отсюда вытекает следующее

Определение 2 [1]. *Точка Торричелли — точка треугольника, из которой все стороны видны под углом в 120°. Существует только в треугольниках с углами, меньшими 120°, при этом она единственна и, значит, совпадает с точкой Ферма.*

Проблема Штейнера

Как найти кратчайшую сеть отрезков прямых линий, соединяющих произвольное множество, скажем из 100, точек? Эта задача не поддаётся ни самым быстродействующим компьютерам, ни самым изобретательным математическим умам.

Итак, рассмотрим данную проблему можно рассмотреть на следующем примере [2].

Некая телефонная компании Steiner Telephone Company подсчитала, что можно сэкономить несколько миллионов долларов, если удастся найти кратчайшую из возможных сетей телефонных линий, соединяющих 100 населённых пунктов. Чтобы решить эту задачу, компания заключила контракт с компьютерной компанией Cavalieri Computer Company, располагающей самыми быстродействующими в мире компьютерами и самыми квалифицированными программистами. Через неделю Cavalieri продемонстрировала в действии программу для решения поставленной задачи. Программа действительно нашла кратчайшую сеть для 15 абонентов всего за один час. Steiner заплатила 1000 долл. за программу и пообещала платить по одному центу за каждую секунду машинного времени, которое потребуется компьютеру для полного решения задачи. К тому времени, когда компьютер завершил вычисления для всех 100 абонентов, телефонная компания задолжала компьютерной многие триллионы долларов, а сами абоненты переместились на много километров со своих мест — либо по своему желанию, либо по причине континентального дрейфа!

Может быть, Cavalieri продала Steiner неправильную программу? Здесь мы столкнулись с одним из примеров так называемой задачи Штейнера, в которой требуется найти кратчайшую сеть прямолинейных отрезков, связывающих между собой заданное множество точек.

Пример прикладной задачи

Итак, мы, начинающие предприниматели, решили открыть свою сеть обувных магазинов. Давайте назовём её «Острый каблучок». Мы построили три магазина в разных точках города. Между первым и вторым магазином расстояние у нас равно r1=6 км, между вторым и третьем магазином r2=7 км, а между третьим и первым r3=5 км. После постройки магазинов у нас возник вопрос: «А где же хранить лишний товар?». Поэтому мы решили построить небольшое помещение (склад) для нашей обуви. Вот только где бы найти такую точку в городе, чтобы нам было быстро и удобно возить из неё обувь в один магазин, потом возвращаться обратно, чтобы взять товар и вести его во другой магазин, а затем вернувшись на склад и вновь набрав товара, держать путь в последний магазин?

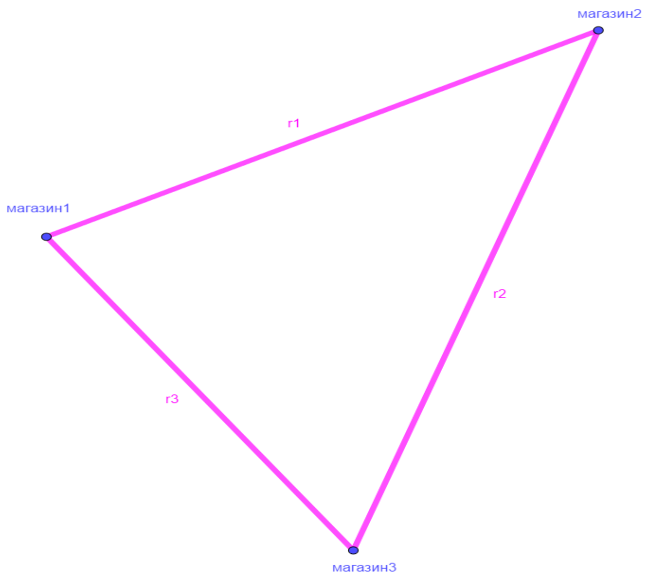


Рис.6

Давайте воспользуемся построением точки Ферма и найдём это удобное для нас место в городе.

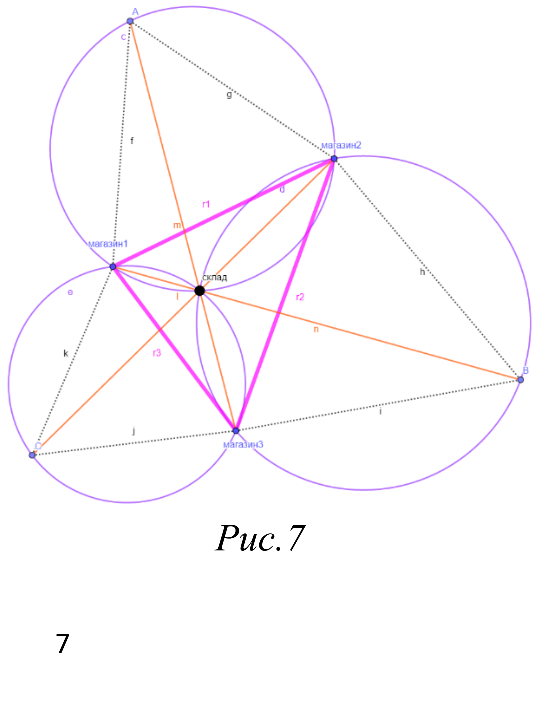


Рис.7

Убрав лишние построения, видим расположение нашего будущего склада.
Склад находится на расстоянии q = 2 км 18 м от первого магазина, со вторым магазином он имеет расстояние p = 4 км 61 м, а с третьим t = 3 км 52 м.

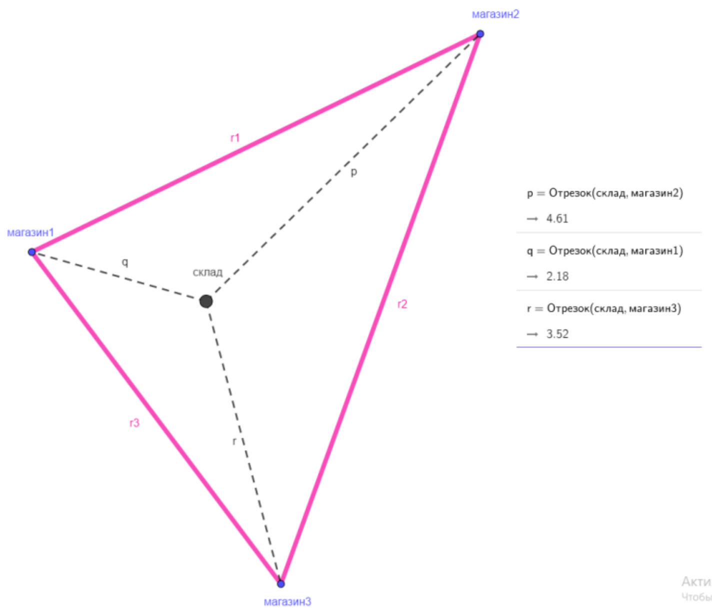


Рис.8

Таким образом, мы нашли такую точку, сумма расстояний от которой до точек магазинов является минимальной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работая над исследованием, был изучен новый и интересный геометрический материал. Изучив многие источники литературы, содержащие в себе данный материал, я могу решать некоторые, хоть и несложные прикладные задачи.

Как мы видели, оказывается, что построение точки Ферма – единственное, что нужно для решения проблемы Штейнера.

В дальнейших исследованиях мы планируем увеличивать количество точек (4 и более) и искать минимальную сумму расстояний от них до неизвестной точки.

На основе проведенного исследования можно сделать вывод, что применение построения точки Ферма может намного облегчить поиск той самой точки, которая будет являться минимальной суммой расстояний от неё до точек каких-либо объектов.

Представленный материал может быть использован как на уроках математики, так и на факультативных и стимулирующих занятиях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Интернет ресурс: https://ru.wikipedia.org.

2. Берн М.У. Поиск кратчайших сетей / М.У. Берн, Л.Р. Грэм // В мире науки. – № 3 март 1989. – С. 64–70.

3. Fekete S.P., Mitchell J.S.B., Beurer K. On the Continuous Fermat-Weber Problem // Operations Research. 2005. Vol. 53, No. 1. P. 61-76.