ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«ГИМНАЗИЯ №3 Г. ГРОДНО»

Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

«Склеивания»

Автор работы:

Вертинская Елена Андреевна, 8 класс
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»,

Руководитель работы:

Разумов Евгений Владимирович, учитель математики, магистр педагогических наук,
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»

г. Гродно, 2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на разрезание увлекались многие ученые с древнейших времен. Решения многих простых задач на разрезания были найдены еще древними греками, китайцами, персами. Геометры всерьез занялись исследованием задач на разрезание фигур и последующим склеиванием из них той или иной фигуры только в начале XX века. Задачи на данную тему являются актуальными и встречаются в олимпиадах и математических боях [1].

На седьмом Минском городском открытом турнире юных математиков (младшая лига – 5-7 классы) в 2020 году была предложена задача «Склеивания». В данной работе предложено решение и обобщение этой задачи [2].

Склеивание нескольких маленьких многоугольников в один большой многоугольник эквивалентно разрезанию этого большого многоугольника на маленькие.

Объект исследования: задачи на разрезания, разбиения, замощения.

Предмет исследования: разрезание многоугольников.

Цель работы: исследовать, при каких k существуют несколько k-угольников, из которых можно склеить n-угольник.

На основании поставленной цели определим ряд **задач** исследования:

1. Доказать, что для любого $k>2$ существует два k-угольника, которые можно склеить в треугольник.
2. Найти все k, что существуют два k-угольника, из которых можно склеить выпуклый n-угольник ($n>3$).
3. Найти все $k>2$, при которых существуют три k-угольника, которые можно склеить в треугольник.
4. Найти для каких k и m ($m>2$) существует m k-угольников, из которых можно склеить выпуклый n-угольник?

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

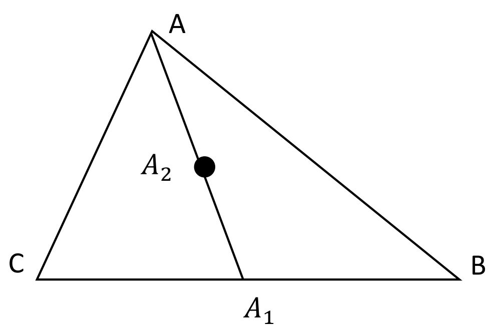
Склеивание m k-угольников в n-угольник эквивалентно разрезанию $n -$ угольника на m k-угольников. Далее в задаче будем рассматривать разрезание выпуклого n-гольника.

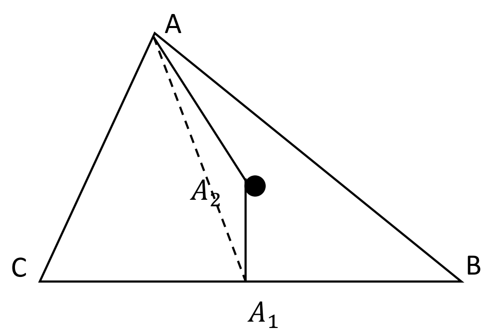
Очевидно, что проведя чевиану $AA_1, A_1 \epsilon BC$ в любом треугольнике $ABC,$ мы разрезаем треугольник на два треугольника.

Утверждение 1. Треугольник ABC можно разрезать на два k-угольника, $k \geq 4$ разрезом, проходящим через точки A и A_1.

Докажем это с помощью метода математической индукции.

База индукции. $k = 4$.





Разрезание треугольника ABC на два четырехугольника строится следующим образом: выберем на AA_1 точку A_2, отличную от концов отрезка AA_1, сдвинем точку A_2на величину $\varepsilon > 0$. Получим два четырехугольника: CA_1A_2A и BA_1A_2A.

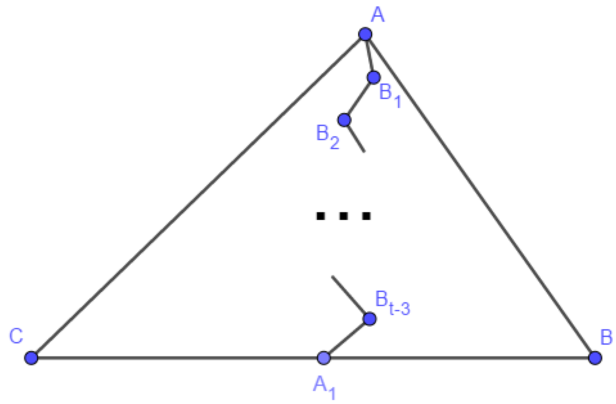
Такая величина ε найдется для любого треугольника, чтобы точка A_2 осталась внутри него.

База доказана.

Шаг индукции.

Пусть треугольник ABC можно разрезать на два k-угольника, при всех $k \leq t$ разрезом, проходящим через точки A и A_1.

Докажем, что это возможно и для $k = (t + 1)$.



Пронумеруем вершины разреза (ломанной) $B_1, B_2, \dots, B_{(t-3)}$ так, что $A_1CAB_{1\dots}B_{(t-3)}$ и $A_1BAB_{1\dots}B_{(t-3)}$ два t-угольника.

Рассмотрим треугольник AB_1B_2 и его сторону B_1B_2. Выберем точку B_0, $B_0 \epsilon B_1B_2$, отличную от B_1 и B_2. Сдвинем точку B_0 по перпендикуляру, восстановленному в точке B_0 так, чтобы точка A и точка B_0 оказались в одной полуплоскости относительно B_1B_2, на величину $\varepsilon > 0$. Получим два (t+1)-угольника: $A_1CAB_1B_0B_2 \dots B_{(t-3)}$ и $A_1BAB_1B_0B_2 \dots B_{(t-3)}$.

Такая величина ε найдется для любого треугольника AB_1B_2, чтобы точка B_0 осталась внутри него.

Шаг доказан.

Таким образом, основываясь на базе индукции и из справедливости доказываемого утверждения для $k \le t$, следует, справедливость данного утверждения для $k = (t+1)$. На основании принципа математической индукции, можем сделать вывод, что утверждение справедливо для любого $k \ge 4, k \epsilon \mathbb{N}$.

Следовательно, утверждение 1 доказано.

Рассмотрим выпуклый n-угольник. Найдём k_{min} - минимальное k такое, что n-угольник можно разрезать на два k-угольника.

Пусть каким-то разрезом разделили n-угольник на два k-угольника. Посчитаем количество сторон у каждого k-угольника.

Пусть у первого k-угольника n_1 сторон, не лежащих на линии разреза (эти n_1 стороны лежат на сторонах исходного n-угольника), а у второго k-угольника n_2 таких сторон. Пусть на линии разреза лежат t сторон, которые являются общими для двух k-угольников.

Тогда,

$n_1 + n_2 + 2t = 2k$

Так как $n_1 + n_2 \ge n$, и $t \ge 1$, то

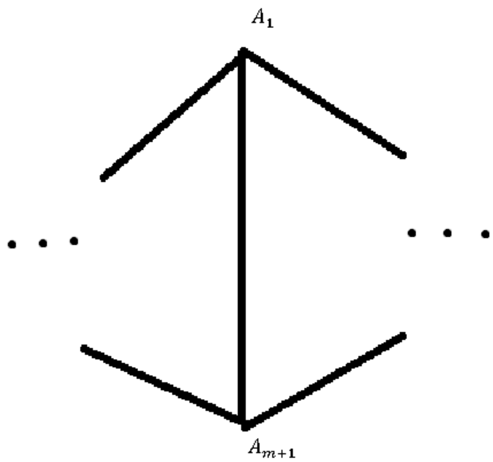
$n_1 + n_2 + 2t = 2k \ge n + 2$

$2k \geq n+2$
$k \geq \frac{n}{2}+1.$

Так как k − целое, то $k_{min} = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1.$

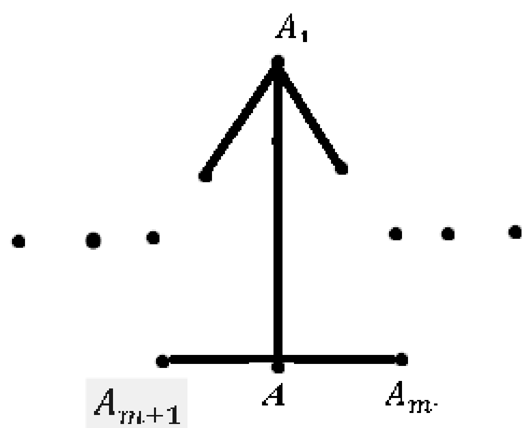
Приведём примеры разрезания n-угольника на два k_{min}-угольника.

1) $n = 2m$



A_1A_{m+1} является диагональю, соединяющей противоположные вершины n-угольника.

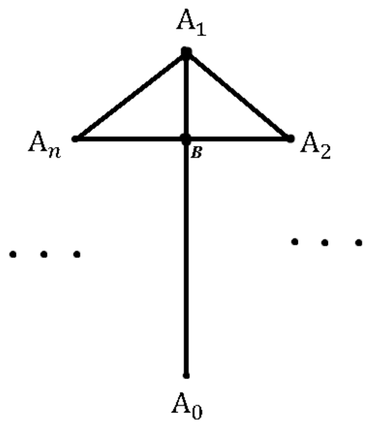
2) $n = 2m - 1$



Разрез A_1A проходит через вершину A_1 и точку A на противолежащей стороне A_1A_{m+1} n-угольника. Таким образом n-угольник можно разрезать на два k_{min}-угольника, где $k_{min} = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1.$

Покажем, что n-угольник можно разрезать на два k-угольника, где $k \geq k_{min}$.

Рассмотрим n-угольник.



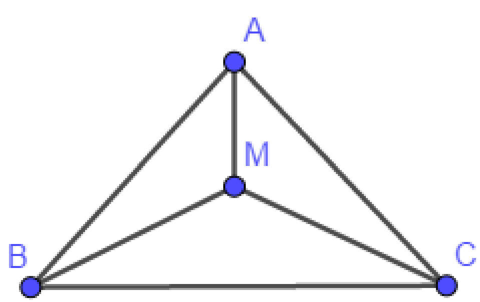
A_0 совпадает либо с A (при $n = 2m - 1$) либо с A_{m+1} (при $n = 2m$), $B = A_1A_0 \cap A_2A_n$.

Согласно утверждению 1 $\varDelta A_1A_2A_n$ можно разрезать на два p-угольника, $p \geq 4$ разрезом, проходящим через точки A_1 и B. Таким образом, n-угольник можно разрезать на два k-угольника, $k \geq k_{min}$.

Утверждение 2. Треугольник можно разрезать на три k-угольника, где $k = 2m + 1, m\epsilon\mathbb{N}, m \geq 1$. Будем разрезать тремя ломанными с равным количеством звеньев (при $k = 2m + 1$ по m звеньев), каждая из них проходит через вершину треугольника ABC и точку M внутри него.

Докажем это с помощью метода математической индукции.

База индукции. $k = 3$.

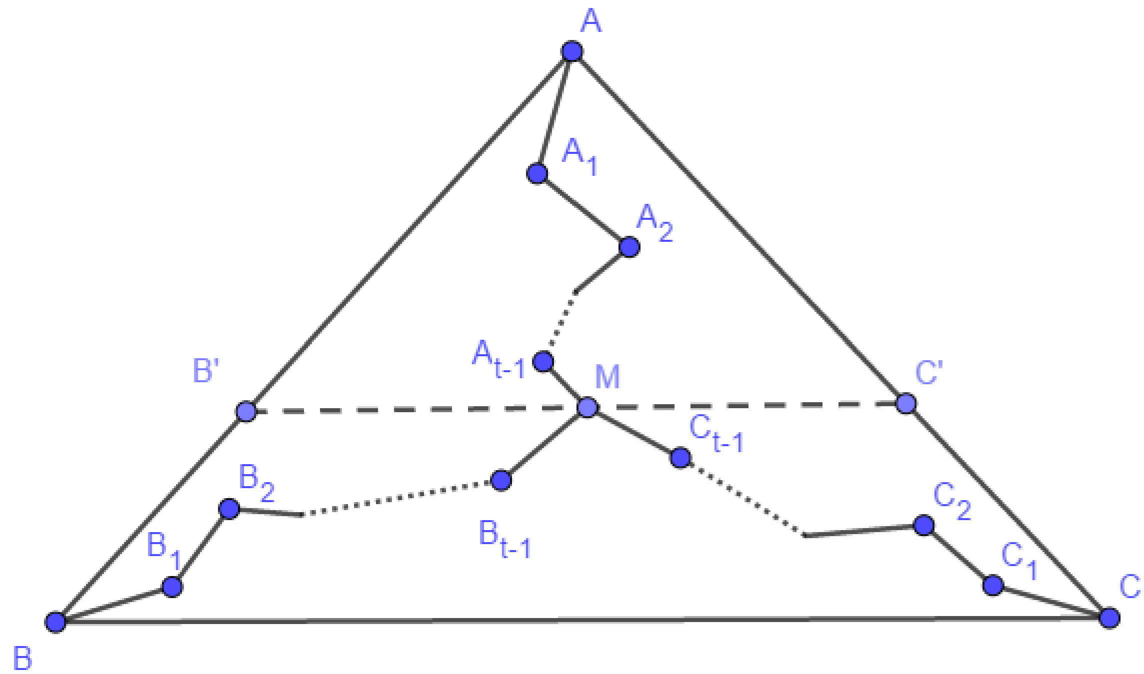


База верна.

Шаг индукции. Пусть треугольник ABC можно разрезать на три k-угольника. Для $k = 2t + 1$ тремя ломанными, в каждой из которой по t звеньев, проходящими через вершины треугольника и точку M внутри треугольника ABC.

Докажем, что это возможно и для $k = 2(t + 1) + 1 = 2t + 3$.

Пронумеруем вершины разреза (ломаной) $A_{1,}A_2, \dots, A_{(t-1)}$; $B_{1,}B_2, \dots, B_{(t-1)}$;$C_{1,}C_2, \dots, C_{(t-1)}$ так, что $BB_1B_2 \dots B_{(t-1)}\, M\, A_{(t-1)} \dots A_1A$; $BB_1 \dots B_{(t-1)}\, M\, C_{(t-1)} \dots C_1C$; $CC_1 \dots C_{(t-1)}\, M\, A_{(t-1)} \dots A_1A$ — три (2t+1)- угольника.



Докажем, что к ломаной $AA_1 \ldots A_{(t-1)}M$ можно добавить вершину A_0, так что получится ломаная $AA_1A_0A_2 \ldots A_{(t-1)}\ M$.

Построим прямую параллельную ВС и проходящую через точку М; пусть ее точки пересечения с AB и AC – точки B' и C' соответственно.

Тогда, по утверждению 1 относительно треугольника $B'AC'$, это возможно.

Аналогично к ломаным $BB_1 \ldots M$ и $CC_1 \ldots M$,можно добавить по 1 вершине.

Таким образом $AA_1A_0A_2 \ldots A_{(t-1)}\ M\ B_{(t-1)} \ldots B_2B_0B_1B$, $BB_1B_0B_2 \ldots B_{(t-1)}\ M\ C_{(t-1)} \ldots C_2C_0C_1C$, $CC_1C_0C_2 \ldots C_{(t-1)}\ M\ A_{(t-1)} \ldots A_2A_0A_1A$ три (2t+3)-угольника.

Шаг доказан.

Таким образом, основываясь на базе индукции и из справедливости доказываемого утверждения для $k = (2t+1)$ следует справедливость данного утверждения для $k = (2t+3)$. На основании принципа математической индукции, можем сделать вывод, что утверждение верно для любого нечетного $k \geq 3$.

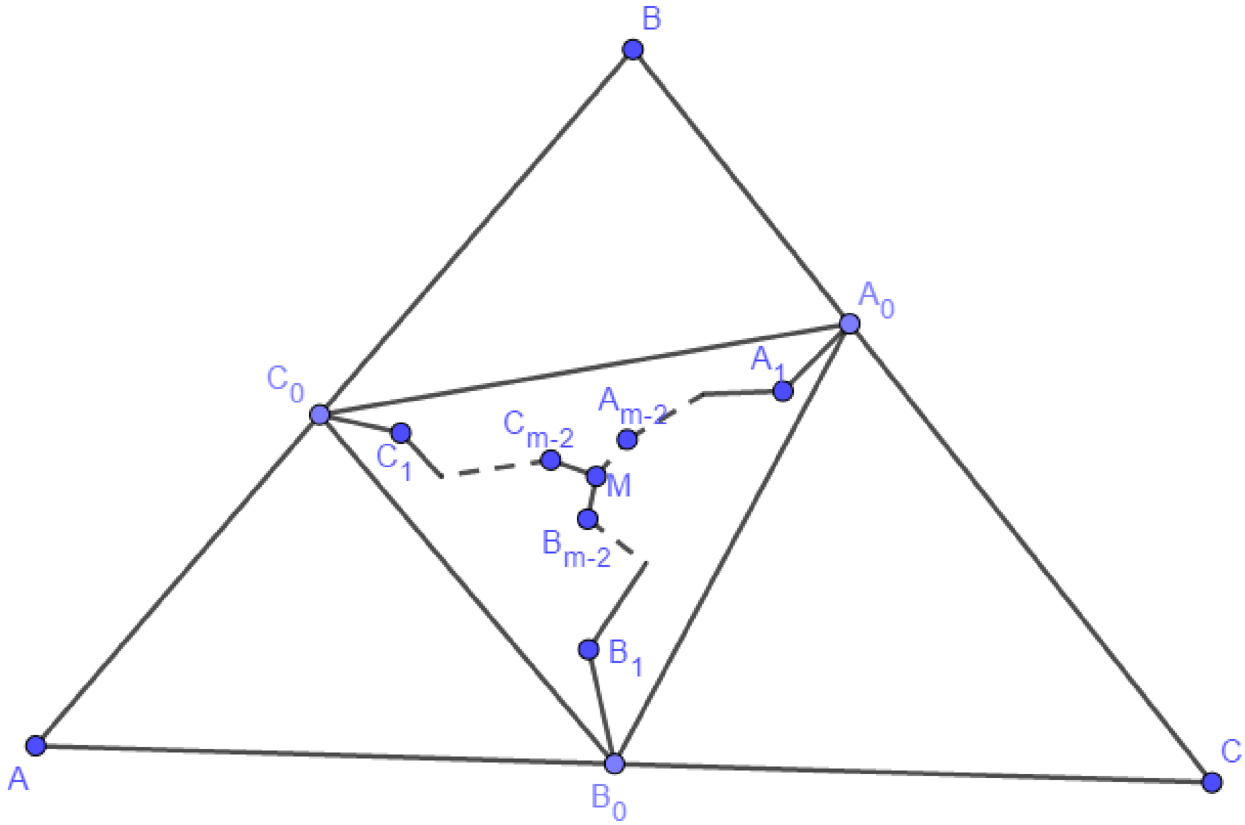
Следовательно, утверждение доказано.

Утверждение 3. Треугольник можно разрезать на три k– угольника, где $k = 2m\ , m \epsilon \mathbb{N}, m \geq 2$.

Доказательство.

Отметим точки C_0, B_0, A_0на сторонах AB, AC, BC треугольника ABC соответственно.

Согласно утверждению 2, сформулированному и доказанному ранее, треугольник $A_0B_0C_0$ можно разрезать тремя ломаными с равным количеством звеньев такими, что каждая из них проходит через вершины треугольника $A_0B_0C_0$ и точку M внутри него. Тогда, треугольник $A_0B_0C_0$ разрежем на три $2(m-1)+1=(2m-1)$-угольника: $A_0A_1 \dots A_{(m-2)}\,M\,C_{(m-2)} \dots C_1C_0$, $C_0C_1 \dots C_{(m-2)}\,M\,B_{(m-2)} \dots B_1B_0$, $B_0B_1 \dots B_{(m-2)}\,M\,A_{(m-2)} \dots A_1A_0$.



Рассмотрим многоугольник $AC_0C_1 \dots C_{(m-2)}\,M\,B_{(m-2)} \dots B_1B_0$.

Он содержит на 1 вершину больше, чем соответствующий ему $(2m-1)$-угольник, а значит, является $2m$-угольником.

Аналогично получаем, что, $BC_0C_1 \dots C_{(m-2)}\,M\,A_{(m-2)} \dots A_1A_0$ и $CB_0B_1 \dots B_{(m-2)}\,M\,A_{(m-2)} \dots A_1A_0$ также являются $2m$-угольниками.

Таким образом, мы получили требуемое разрезание, а следовательно, утверждение 3 доказано.

Лемма 1. Любой k-угольник можно разрезать на два k-угольника, один из которых будет выпуклым.

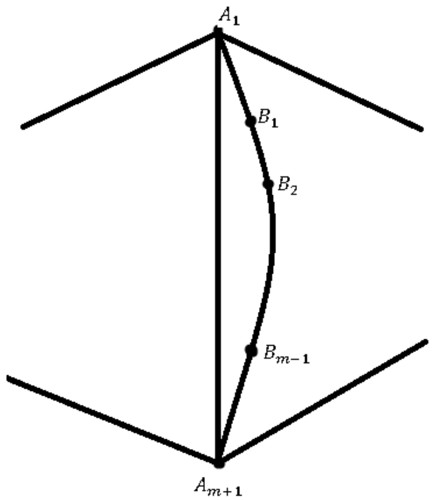
Доказательство.

Рассмотрим выпуклый k-угольник $A_1A_2 \dots A_k$.

а) Пусть $k = 2n$.

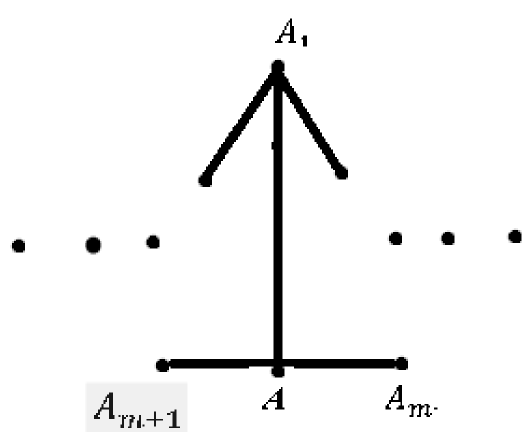
Проведём диагональ $A_1 A_{m+1}$, получим два выпуклых $(m+1)$-угольника. Проведём дугу $A_1 A_{m+1}$ такую, что все внутренние точки данной дуги лежат во внутренней области одного из $(m+1)$-угольников.

Расположим на дуге $A_1 A_{m+1}$ $(m-1)$ точку B_1, $B_2, \dots, B_{m-1}$. Получим два k-угольника, один из которых выпуклый (выпуклым является k-угольник, который не содержит дугу).



б) Пусть $k = 2m - 1$.

Проведём отрезок $A_1 A$, где $A \in A_m A_{m+1}$, получим два выпуклых $(m+1)$-угольника.



Проведём дугу $A_1 A$, такую, что все внутренние точки дуги лежат во внутренней области одного из $(m+1)$-угольников.

Расположим на дуге $A_1 A$ $(m-2)$ точки B_1, $B_2, \dots, B_{m-2}$. Получим два k-угольника, один из которых выпуклый (выпуклым является k-угольник, который не содержит дугу).

Что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Минимальное количество k-угольников, из которых можно склеить n-угольник m_0 равно $m_0 = \left\lceil \frac{n-2}{k-2} \right\rceil$.

Доказательство.

Пусть n_m - количество вершин фигуры, которую можно склеить из m некоторых k-угольников. Склеив $(m-1)$ k-угольник мы получим фигуру с количеством вершин равным n_{m-1}.

Заметим, что присоединив к n_{m-1}-угольнику k-угольник, количество n_m вершин у получившейся фигуры увеличивается не более чем на $(k-2)$, то есть $n_m \leq n_{m-1} + k - 2 \leq n_{m-2} + 2(k-2) \leq n_{m-3} + 3(k-2) \leq \cdots \leq n_1 + (m-1)(k-2)$.

Так как $n_1 = k$ (количество вершин фигуры, склеенной из одного k-угольника), то

$n_m \leq k + (m-1)(k-2)$.

Так как $n_m = n$ по условию, то

$n \leq k + (m-1)(k-2)$

$n \leq k + m(k-2) - k + 2$

$n \leq m(k-2) + 2$

$m \geq \frac{n-2}{k-2}$, то есть

$m_0 \geq \frac{n-2}{k-2}$ и m_0-минимальное целое, то

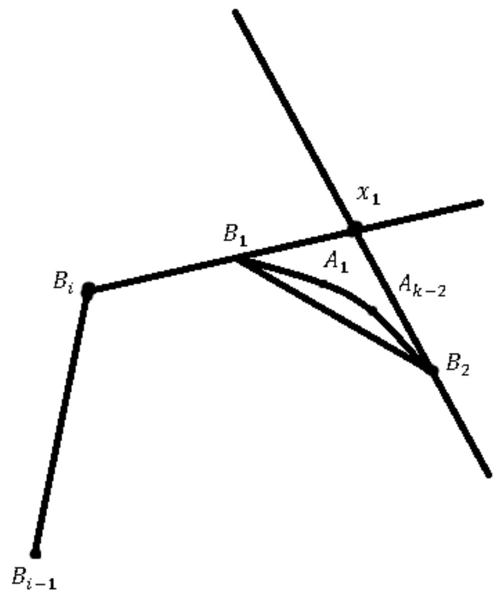
$m_0 = \left\lceil \frac{n-2}{k-2} \right\rceil$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. К любому выпуклому i-угольнику можно достроить выпуклый k-угольник так, чтобы полученная фигура была выпуклым $(i+k-2)$-угольником.

Доказательство.

Рассмотрим i-угольник.



Выберем любую сторону i-угольника, не нарушая общности, пусть это будет сторона B_1B_2.

Проведем прямые B_3B_2 и B_1B_i, $B_3B_2 \cap B_1B_i = X_1$.

Построим дугу B_1B_2, такую, что все внутренние точки дуги лежат во внутренней области $\triangle B_1B_2X_1$. На дуге B_1B_2 отметим $(k-2)$ точки A_1, $A_2, \dots, A_{k-2}$, которые не совпадают с точками B_1 и B_2.
$\angle A_1B_1B_2 + \angle B_2B_1B_i < 180°$ и $\angle A_{k-2}B_2B_1 + \angle B_1B_2B_i < 180°$, а значит, полученный $(i+k-2)$-угольник $A_1A_2 \dots A_{k-2}B_2B_3 \dots B_iB_1$ является выпуклым.

Что и требовалось доказать.

Таким образом, согласно *лемме 2*, последовательно пристраивая к выпуклому k-угольнику (m_0-1) k-угольников, получим выпуклый n_m -угольник, то есть искомый n-угольник.

Отметим, что последовательно пристраивать k-угольники можно к любой стороне получившейся фигуры на любом шаге.

Покажем что любой получившийся таким склеиванием n-угольник (который состоит из m_0 k-угольников) можно составить из m-угольников, где $m \geq m_0$.

По *лемме 1* любой выпуклый k-угольник можно разрезать на два k-угольника, один из которых выпуклый.

Таким образом, выбрав любой выпуклый k-угольник в фигуре и разрезав его на два k-угольника (один выпуклый и один не выпуклый), получим n-угольник, склеенный из (m_0+1) k-угольников (при этом количество выпуклых k-угольников не изменилось).

Последовательно выполняя данную операцию $(m - m_0)$ раз получим n-угольник, склеенный из m k-угольников, где $m \geq m_0$.

Таким образом, для заданных k и n, мы можем найти все m , для которых существует m k-угольников, из которых можно склеить выпуклый n-угольник, то есть $m \geq m_0 = \left\lceil \frac{n-2}{k-2} \right\rceil$.

Для заданных n и m можно найти ограничение для k:

$$m \geq \frac{n-2}{k-2}$$

$k \geq \frac{n-2}{m} + 2$, k -целое.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования получены следующие результаты:

1) Выведено и доказано с помощью метода математической индукции *утверждение 1*, что любой треугольник можно разрезать на два k–угольника, $k \geq 4$. Для $k = 3$ приведен пример разрезания.

2) Сформулированы и доказаны с помощью метода математической индукции утверждения, из которых следует, что при любом $k > 2$ существуют три k-угольника, которые можно склеить в треугольник.

3) Найдены все значения k такие, что существует два k-угольника, из которых можно склеить выпуклый n-угольник.

4) Найдены все значения k и m для которых существует m k-угольников, из которых можно склеить выпуклый n-угольник.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Екимова, М. А. Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – М. МЦНМО, 2002. – 120 с.
2. Исследовательские задания VII Минского городского открытого турнира юных математиков (младшая лига – 5-7 классы). – Режим доступа: http://www.uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html – Дата доступа: 10.03.2020.