PARADOKS W TEORII GIER

Adrian Białek

Politechnika Łódzka, Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki, Mechatronika

Academic adviser - Dr inż. Gertruda Gwóźdź-Łukawska

Dla wielu ludzi matematyka znajduje odzwierciedlenie tylko w szkole lub w prostych sytuacjach życiowych. Jednak pewne zjawiska przyrodnicze, czy też społeczne pokazują nam, jak głębokie odzwierciedlenie w tych problemach ma właśnie królowa nauk. Jedną z gałęzi tej dziedziny są paradoksy, z którymi spotykamy się praktycznie każdego dnia, jednak nie zdajemy sobie sprawy z tego, że pewne decyzje, które na pierwszy rzut oka nie są związane z matematyką winny jednak być konsultowane z matematykami.

Jeśli sięgnęlibyśmy do słownika językowego w poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie: „Czym jest właściwie paradoks ?” to z pewnością otrzymalibyśmy takie oto odpowiedzi:

„1. Twierdzenie zaskakująco sprzeczne z przyjętym powszechnie mniemaniem, często ujęte w formę aforyzmu; też: sytuacja pozornie niemożliwa, w której współistnieją dwa całkowicie różne lub wykluczające się fakty.
2. Rozumowanie pozornie oczywiste, ale wskutek zawartego w nim błędu prowadzące do wniosków jawnie sprzecznych ze sobą lub z uprzednio przyjętymi założeniami” [1]

Znając już troszeczkę teorii i rozumiejąc mentalnie to pojęcie, możemy zrobić krok dalej i zastanowić się jakie problemy występujące na co dzień moglibyśmy wyjaśnić przy pomocy matematyki i pojęcia paradoksu.

Spotykając się z ludźmi często słyszymy jak ciężko jest podróżować samochodem. Zakorkowane drogi, ograniczenia prędkości, a do tego niezbyt gęsta sieć dróg szybkiego ruchu czy autostrad.

Rozpatrzmy zatem taki oto potencjalny przykład:

Wyobraźmy sobie rodzinę Iksińskich na co dzień mieszkającą w Częstochowie, która chce wyjechać na majowy weekend. Pragnie ona zobaczyć poznańskie koziołki i Stare Miasto. Pierwszym krokiem przed podróżą jest obmyślenie trasy. Trasa z Częstochowy do Poznania może odbyć się w dwojaki sposób.

Pierwsza opcja to trasa Częstochowa - Łódź, która zajmuje zawsze 150 minut ze względu na zły stan nawierzchni, a następnie Łódź-Poznań, z tym, że odcinek ten jest ograniczony licznymi zakazami wyprzedzania i pokonanie tej trasy jest zależne od ilości jadących aktualnie pojazdów.

Druga alternatywa to trasa Częstochowa - Wrocław i kolejno Wrocław - Poznań jest ona odwrotnością w czasach oraz warunkach przejazdu dla opcji pierwszej. Wszystko to widoczne jest na rysunku nr 1.

Dla obydwu tras zakładamy, że jeśli porusza się nią p pojazdów to czas przejazdu wynosi p minut.

Rys.1 Czasy przejazdu z Częstochowy do Łodzi [2]

Ze względu na zapowiadaną piękną pogodę oraz przyjazd sławnego zespołu muzycznego do Poznania o wyjeździe pomyślało również 150 innych rodzin z Częstochowy (Każda z nich jedzie jednym samochodem).

Jeśli wszyscy pojadą przez Łódź:

$$p = 150$$

$$150 + p = 300\ minut$$

Natomiast jeżeli wszyscy pojechaliby przez Wrocław:

$$p = 150$$

$$150 + p = 300\ minut$$

Widać stąd, że jeśli wszyscy pojadą jakąkolwiek z tras to czas przejazdu będzie taki sam.

Niestety rzadko się zdarza, aby wszyscy jednogłośnie mieli to samo zdanie. Zatem co wydarzy się jeśli połowa rodzin pojedzie przez Łódź, a druga przez Wrocław ?

Trasa przez Łódź:

$$p = 75$$

$$150 + p = 225\ minut$$

Trasa przez Wrocław:

$$p = 75$$

$$150 + p = 225\ minut$$

Zauważamy, że przy tak rozłożonej siatce przejazdu czas dotarcia do Poznania zmniejszył się aż o 75 minut !

Byłoby to najlepsze rozwiązanie do pokonania tej trasy. Wystarczyłoby zamontować urządzenia zliczające ilość wjeżdżających na daną trasę pojazdów, a następnie sterować ruchem tak, aby zawsze ich ilość pozostawała w stosunku 50 na 50.

Ze względu na dotacje wojewódzkie została rozbudowana siatka połączeń i wybudowano drogę szybkiego ruchu z najnowocześniejszymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi pozwalającymi pokonać trasę z Wrocławia do Łodzi w ułamkach sekundy. Na nasze potrzeby możemy przyjąć, że czas ten jest bliski 0 minut.

Skoro więc pojawiła się nowa trasa, to teoretycznie czas przejazdu również powinien się skrócić. Niestety skutek jest odwrotny do spodziewanego.

Nasza trasa może przebiegać w następujący sposób Częstochowa - Wrocław - Łódź - Poznań. Oczywiste jest, że każdy ze zmotoryzowanych mieszkańców Częstochowy wybierze właśnie tę trasę, łudząc się, że może akurat uda mu się pokonać ten dystans szybciej (co ma sens, gdyż zawsze $p \leq 150$). Możemy policzyć czas ich przejazdu:

$$p + p + 0 = 150 + 150 + 0 = 300\ min$$

Jak możemy zauważyć czas przejazdu pomimo wybudowania nowej drogi ekspresowej niestety nie zmalał [3].

Sytuacja taka została opisana jako Paradoks Braessa, który potwierdził niemiecki matematyk Dietrich Braess.

„W pewnym modelu ruchu drogowego czasy podróży pojazdów mogą ulec wydłużeniu po dodaniu do sieci drogowej nowego połączenia” [4].

Paradoks ten ma zastosowanie w teorii gier. Każdy z podróżujących jest ‘pionkiem’ na planszy, która jest siecią dróg. Celem gry jest jak najszybsze dotarcie do wyznaczonego celu. Głównym problemem jest to, że każdy z graczy wzajemnie przeszkadza sobie w osiągnięciu wygranej. Budowa nowych dróg, czy też zwiększanie przepustowości tras nie musi prowadzić do polepszenia warunków jazdy, lecz przeciwnie.

Według teorii Downsa - Thomsona zwiększenie przepustowości dróg powoduje wystąpienie trzech efektów, które obniżają ogólny dobrobyt:

- ✓ Kierowcy poruszający się na co dzień alternatywnymi drogami zaczynają korzystać z drogi o zwiększonej przepustowości
- ✓ Kierowcy omijający przejazdy w czasie godzin szczytu, zaczynają poruszać się w tych właśnie godzinach
- ✓ Pasażerowie komunikacji miejskiej rezygnują z niej na rzecz własnego samochodu

Rzeczywiste odwzorowanie tych sytuacji miało miejsce np. w Warszawie, kiedy to utrudniono dostęp do mostu Świętokrzyskiego i nie spowodowało to przewidywanego paraliżu na drogach stolicy [5].

W teorii gier występują również inne konfliktowe sytuacje. O tym, że każdy z graczy poszukuje dla siebie jak najkorzystniejszej drogi do osiągnięcia zamierzonego celu może poświadczyć kolejny przykład - Problem przestępcy.

W pewnym mieście wybudowano nowoczesny bank, w którym to przechowywane były najcenniejsze sztabki złota spośród całego świata. Naprzeciwko banku mieszkali dwaj przyjaciele - Cyryl i Barnaba. Każdego dnia obserwowali coraz to cenniejsze przedmioty ukrywane w podziemiach banku. Każdy z nich miał swoje najskrytsze marzenia, które chciał spełnić. Niestety, aby przyspieszyć osiągnięcie tego celu wstąpili na drogę przestępstwa... Pech chciał, że szybko zostali zdemaskowani. Oboje są przesłuchiwani oddzielnie i mają do dyspozycji następujące możliwości:

- Przyznać się do winy
- Nie przyznać się do winy

Jednak każda z tych decyzji niesie za sobą pewne konsekwencje:

- Jeżeli razem przyznają się do zarzucanego im czynu, to oboje zostaną skazani na 7 miesięcy więzienia
- Jeżeli będą milczeć i nie przyznają się do winy to oboje dostaną 4 miesiące więzienia
- Jeśli jednak jeden z nich przyzna się do zarzucanych mu czynów, a drugi będzie milczał (nie przyzna się), to pierwszy zostanie skazany na 2 miesiące

pozbawienia wolności natomiast drugi, który się nie przyzna dostanie karę 10 miesięcy więzienia.

Możemy zobrazować to przy pomocy tabeli.

Tabela 1 Decyzje i ich konsekwencje

DECYZJA	CYRYL	BARNABA
Każdy z nich przyznaje się do winy	7	7
Brak winnych	4	4
Cyryl przyznaje się do winy	2	10
Barnaba przyznaje się do winy	10	2

Wartości w tabeli odzwierciedlają ilość miesięcy odbywania kary dla danej osoby.

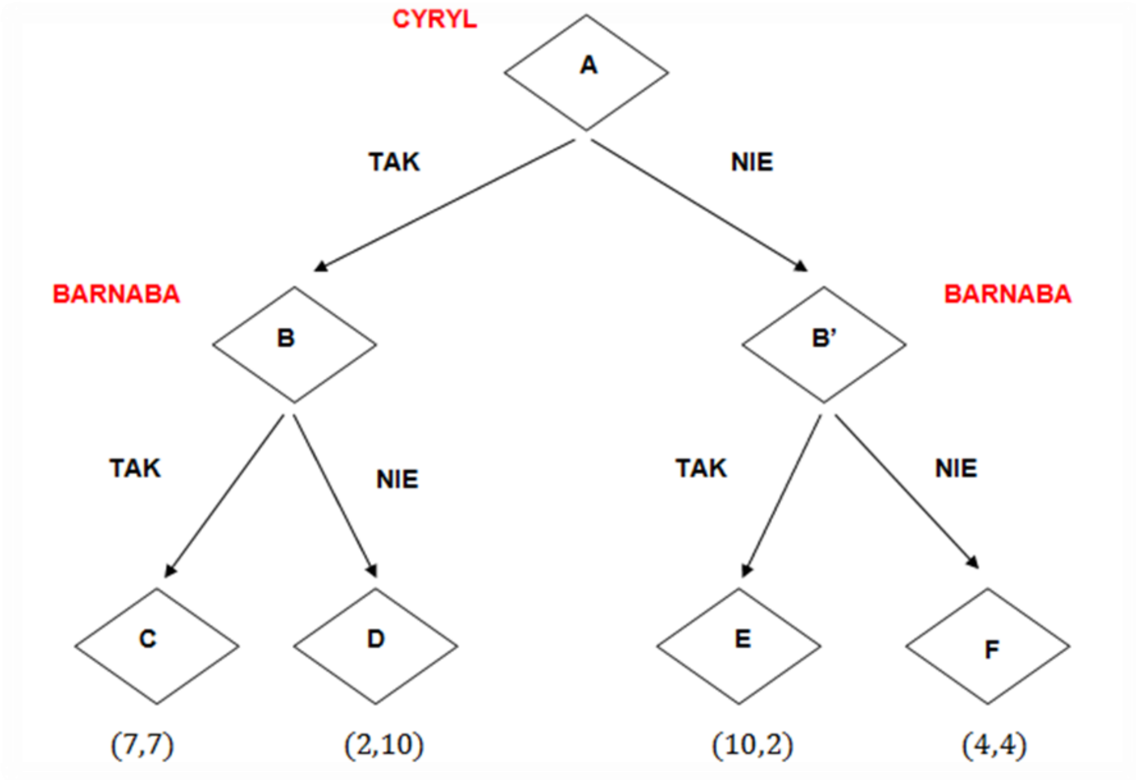
Problem ten jest swego rodzaju grą, w której występuje sytuacja konfliktowa. Wybory jednej osoby wpływają jednocześnie na drugą postać.

Elementami gry są:

- Gracze - musi być ich minimum dwóch
- Strategie - opis postępowania gracza oraz jego sytuacji
- Wypłaty - są one przypisane do każdej strategii (w powyższym przykładzie jest to ilość miesięcy)

Należy przyjąć, że każdy gracz minimalizuje straty i maksymalizuje zyski, gdyż chce on znaleźć się w jak najlepszej sytuacji.

Wszystko to możemy opisać przy pomocy popularnego drzewa.



Rys.2 Schemat opisujący grę

Na schemacie z rysunku 2 strzałki odwzorowują posunięcie każdego z graczy. Odpowiedzi „TAK" oraz „NIE" obrazują odpowiednio „Przyznanie się do winy" i „Nie przyznanie się do winy". Romby o oznaczeniach a,b,c itd. to tak zwane wierzchołki gry. Wierzchołek A jest wierzchołkiem początkowym, który pokazuje możliwości wyboru jakie ma Cyryl, wierzchołki B oraz B' wskazują możliwości wyboru Barnaby. Cztery wierzchołki końcowe wskazują na wynik gry, czyli wypłatę, która jest zależna od decyzji jakie podejmują nasi gracze. Pod tymi wierzchołkami w nawiasach zapisane zostały odpowiednio wyniki gry dla Cyryla i Barnaby. Możemy zauważyć, iż na samym środku naszego drzewa decyzje Barnaby podejmowane są w tym samym czasie co decyzje Cyryla, stąd wniosek, że jest to gra jednoetapowa. Kolejną obserwacją może być fakt, że kolejność graczy nie ma żadnego znaczenia tj. Graczem nr 1 może być zarówno Cyryl lub Barnaba, a ostateczny wynik gry byłby taki sam.

Dążenie do optymalizacji rozwiązania prowadzi do osiągnięcia tzw. Równowagi Nasha, w której strategia każdego z graczy jest optymalna, przyjmując wybory oponentów za ustalone [6]. Każda skończona gra ma przynajmniej jedną równowagę Nasha, wyjątek mogą stanowić strategie czyste (wybór gracza jest zdarzeniem pewnym i trwa on przy nim) [7]. Inaczej mówiąc są to takie pary strategii, które są najlepszymi odpowiedziami na siebie nawzajem. W grach może występować kilka

Równowag Nasha. W rozpatrywanym wyżej przykładzie Równowaga Nasha to wynik (4,4) , czyli jednocześnie najlepsze rozwiązanie dla obydwu graczy.

Niestety równowaga ta nie musi oznaczać tego, iż gracze otrzymają najlepsze możliwe wyniki.

Dylemat więźnia to typowy przykład strategii czystej - każdy gracz dokonywał wyboru z całkowitą pewnością. Jeżeli gracze w sposób losowy decydowaliby o swoich wyborach, wtedy mielibyśmy do czynienia ze strategią mieszaną [8].

Gra na złotówki

Każdy z dwóch graczy musi podać w tej samej chwili jedną z liczb: „1" lub „2". Gracz A wygra, jeżeli suma podanych liczb jest nieparzysta, natomiast gracz B wygra jeśli suma podanych liczb jest parzysta. Osoba przegrywająca płaci wygrywającemu taką liczbę złotych, ile wynosi suma podanych liczb.

Tabela 2 Wypłaty każdego gracza

	GRACZ B - „1"	**GRACZ B - „2"**
GRACZ A - „1"	-2,2	3,-3
GRACZ A - „2"	3,-3	-4,4

Przeanalizujmy teraz grę z perspektywy gracza A, przy założeniu, że na 7 losowań cztery razy wylosuje on „1", a trzy razy „2" w przypadkowej kolejności.

- Jeżeli gracz B powie „1" - wtedy gracz A traci 2 złote w $\frac{4}{7}$ przypadków, a wygrywa 3 złote w $\frac{3}{7}$ przypadków.

  Średnio wygrywa więc: $\frac{4}{7} \cdot (-2\ zł) + \frac{3}{7} \cdot 3\ zł = \frac{1}{7}\ zł$

- Jeśli jednak gracz B powie „2" - wtedy gracz A zyskuje 3 złote w $\frac{4}{7}$ przypadków, a przegrywa 4 złote w $\frac{3}{7}$ przypadków.

  Średnio wygrywa więc: $\frac{4}{7} \cdot 3\ zł + \frac{3}{7} \cdot (-4\ zł) = 0\ zł$

Jeżeli gracz A przyjmie takie strategie to oznacza, że nie przegra, gdy gracz B wybierze którąś z powyższych opcji. Dla gracza A gra jest sprawiedliwa i opłacalna.

Rozważmy teraz czy istnieje taka możliwość, aby gracz A wybrał tak strategię, aby zawsze miał wygraną większą bądź równą zero.

Niech:

$$p_A - \text{ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia: gracz A wybiera "1"}$$

Wygrana gracza A (wartość średnia) w sytuacji, gdy gracz B powie „1”:

$$p_A \cdot (-2) + (1 - p_A) \cdot 3$$

Wygrana gracza A (wartość średnia) w sytuacji, gdy gracz B powie „2”:

$$p_A \cdot 3 + (1 - p_A) \cdot (-4)$$

Chcemy dowiedzieć się czy istnieje takie prawdopodobieństwo, dla którego gracz A średnio wygrywa taką samą ilość pieniędzy niezależnie od wyboru gracza B, więc:

$$p_A \cdot (-2) + (1 - p_A) \cdot 3 = p_A \cdot 3 + (1 - p_A) \cdot (-4)$$

$$-2p_A + 3 - 3p_A = 3p_A - 4 + 4p_A$$

Ostatecznie:

$$p_A = \frac{7}{12}$$

Stąd wniosek, że gracz A powinien wybierać „1” z prawdopodobieństwem $\frac{7}{12}$ natomiast „2” z prawdopodobieństwem $\frac{5}{12}$

Średnia wartość wygranej dla gracza A w takim przypadku:

$$\frac{7}{12} \cdot (-2\ zł) + \frac{5}{12} \cdot 3\ zł = \frac{1}{12}\ zł$$

Podsumowując możemy stwierdzić, że niezależnie od tego co zrobi przeciwnik gracz A będzie wygrywał średnio $\frac{1}{12}\ zł$.

Gra na złotówki jest przykładem strategii mieszanej. Jeżeli nie występuje równowaga Nasha w strategiach czystych, gracze muszą stosować strategie mieszane. Strategie mieszane polegają na tym, że gracze w sposób losowy z określonym prawdopodobieństwem wybierają swoje strategie [9].

Każdy paradoks jest ściśle powiązany z teorią gier. W teorii tej możemy wyróżnić wiele rodzajów strategii. Każda z nich ma wpływ na przebieg danej gry. Można powiedzieć, że jest to poniekąd teoria decyzji, która analizuje sposoby ich optymalnego podejmowania. Oczywiście jak każda metoda analizy, również i teoria gier posiada wady. Dotyczą one głównie upraszczania rzeczywistości, co może prowadzić do pominięcia pewnych czynników psychologicznych mających wpływ na ostateczny wynik. Ze względu na to najczęściej jest ona wykorzystywana w naukach ekonomicznych oraz społecznych do wykonywania badań np. analizy relacji między przedsiębiorstwami w konkurencji oraz konfliktów na rynku.

Odwołania:

[1] Hasło: Paradoks, Słownik Języka Polskiego PWN, W. Doroszewski

[2] Tekstura Ilustracji : https://img.freepik.com/darmowe-zdjecie/stare-tekstury-papieru_1232-1932.jpg?size=626&ext=jpg

[3] W. Czerwiński, Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski, „Kłopoty z komunikacją”, sierpień 2015, http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/zastosowania/

[4] Hasło: Paradoks Braessa, Wikipedia, Paweł Ziemian (dostęp 4.11.2018)

[5] W. Wojtowicz , Urbnews, „Ruch w miastach”, 21.07.2014

[6] Hasło: Równowaga Nasha, Aleksander Durkiewicz (dostęp 29 lipca 2017)

[7] Hasło: Strategia czysta, Kgguwca (dostęp 6 kwietnia 2015)

[8] Hasło: Strategia mieszana, Imnext (dostęp 15 sierpnia 2018)

[9] Ryszard Paweł Kostecki, Uniwersytet Warszawski „Wprowadzenie do teorii gier”