ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ В НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧАХ

Белогривая Т.Е.

УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», факультет математики и информатики, специальность «Управление информационными ресурсами», кафедра системного программирования и компьютерной безопасности.

Научный руководитель - Сетько Е.А., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, ГрГУ им. Я. Купалы

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается решение задач, в постановке условий которых присутствуют интегралы с переменным верхним пределом.

Во введении указан объект исследования – интегралы с переменным верхним пределом в нестандартных задачах.

Целью исследования является знакомство с интегралами с переменным верхним пределом и изучение различных методов их использования в нестандартных задачах.

В основной части рассмотрены наиболее типичные примеры решений интегралов с переменным верхним пределом.

В заключении приведены подведены итоги исследования.

Ключевые слова: производная, интеграл с переменным верхним пределом, дифференциальные уравнения.

В классическом курсе высшей математики в каждом университете студентам вводят понятие интеграла с переменным верхним пределом и теорема об основном свойстве интегралов. Но несмотря на то, что информации немного, множество разнообразных задач по разным разделам высшей математики используют это понятие.

Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любого $x\in[a,b]$ существует интеграл, который называется *интегралом с переменным верхним пределом.* Основное свойство звучит следующим образом:

Если функция f непрерывна на отрезке [a,b], то интеграл с переменным верхним пределом $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, имеет производную, равную значению подынтегральной функции, вычисленной в верхнем пределе, т.е. $F'(x)=f(x)$ [1].

Математический анализ в виде дифференциального и интегрального исчислений был создан в XVII веке как инструмент естествознания. При этом он должен изучаться в связи с его приложениями в физике и других естественных науках.

Так интеграл с переменным пределом применяется в прикладной физике [2], например, для вычисления потенциальной энергии:

Функция $U(x)$ называется потенциальной энергией и может быть записана следующим образом: $U(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx$.

Рассмотрим различные примеры с применением интеграла с переменным верхним пределом.

Пример 1. $\Phi(x)=\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$. Найти $\Phi'(x)$.

Решение. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$.

$$\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = F(t)\Big|_{a(x)}^{b(x)} = F(b(x)) - F(a(x))$$

То есть $\Phi(x)=F(b(x))-F(a(x))$

$\Phi'(x)=(F(b(x))-F(a(x))'=F'(b(x))\cdot b'(x)-F'(a(x))\cdot a'(x)$.

Так как $F'(x)=f(x)$

$\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)' = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$, получаем:

$\Phi' = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$.

Пример 2. Вычислить производную: $\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$.

Решение. Воспользовавшись формулой $f(b(x))\cdot b'(x)-f(a(x))\cdot a'(x)$, получим:

$$\left(\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt\right)' = \cos x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2}$$

Пример 3. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}$.

Решение. Поскольку мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то применим правило Лопиталя. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\times e^{x^2}}{e^{2x^2}};$$

Сократим дробь и, поскольку неопределенность осталась, применим правило Лопиталя повторно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\times 2x};$$

Вычислим окончательно предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=0$.

Пример 4. Пусть $F(x)$ первообразная для функции $\int_0^x (t^3-1)dt$, причём $F(0)=-1$. Найти $F(-1)$.

Решение. По определению первообразной $F'(x)=\int_0^x (t^3-1)dt$

$$\int_0^x t^3dt-\int_0^x dt=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^x-\left.t\right|_0^x=\frac{x^4}{4}-x$$

То есть $F'(x)=\frac{x^4}{4}-x$, следовательно $F(x)=\int\left(\frac{x^4}{4}-x\right)dx=\frac{x^5}{20}-\frac{x^2}{2}+C$

$F(0)=-1\Rightarrow C=-1$

$F(x)=\frac{x^5}{20}-\frac{x^2}{2}+1\Rightarrow F(-1)=-\frac{31}{20}$

Ответ: $-\frac{31}{20}$.

Пример 5. Доказать, что $\int_0^x e^{t^2}dt\sim\frac{1}{2x}\cdot e^{x^2}$.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся определением эквивалентных бесконечно малых функций [1]. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными в окрестности a, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Вычислим производную числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{\left(\frac{1}{2x}\cdot e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{-\frac{1}{2x^2}\cdot e^{x^2}+\frac{1}{2x}\cdot e^{x^2}\cdot 2x}$$

После преобразований получим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{\int\limits_0^x e^{t^2}dt}=1$

Следовательно $\int\limits_0^x e^{t^2}dt \sim \dfrac{1}{2x}\cdot e^{x^2}$.

Пример 6. Решить уравнение $\int\limits_0^x (x^2-t^2)\varphi(t)dt=\dfrac{x^3}{3}$

Решение. Для того, чтобы применить основное свойство интегралов с переменным верхним пределом, найдём производную левой и правой части равенства.

$$\left(\int\limits_0^x x^2\varphi(t)dt-\int\limits_0^x t^2\varphi(t)dt\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'$$

После преобразования, получаем:

$$2x\int\limits_0^x \varphi(t)dt+x^2\varphi(x)-x^2\varphi(x)=x^2$$

Вновь дифференцируем левую и правую части равенства:

$$\left(2x\int\limits_0^x \varphi(t)dt\right)'=\left(x^2\right)'$$

Получаем: $2\varphi(x)+x\varphi'(x)=1$.

Пусть $\varphi(x)=y$, тогда получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $y'=\dfrac{1-2y}{x}$, решая которое находим, что

$$y=-\frac{C}{2x^2}+\frac{1}{2}$$

Ответ: $y=-\dfrac{C}{2x^2}+\dfrac{1}{2}$.

Пример 7. Исследовать функцию $F(x)=\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2dt$ на экстремум.

$$F'(x)=\left(\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2dt\right)'=(x-1)(x-2)^2$$

Приравняем производную к нулю:

$F'(x)=0\Rightarrow(x-1)(x-2)^2=0\Rightarrow x=1$- точка минимума $F_{\min}(1)=\int\limits_0^1 (t-1)(t-2)^2dt=-\dfrac{17}{12}$

Ответ: $-\dfrac{17}{12}$.

Пример 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$F(x)=\int\limits_0^x \frac{(2t+1)dt}{t^2-2t+2}$ на отрезке $[-1;1]$.

Решение. Наибольшее и наименьшее значение функции достигается в точках, в которых производная равна нулю, либо на концах отрезка. Для начала найдем производную:

$$F'(x)=\left(\int\limits_0^x \frac{(2t+1)dt}{t^2-2t+2}\right)'=\frac{2x+1}{x^2-2x+2}$$

Затем необходимо найти точку, в которой производная равна 0.

$$F'(x)=0, x=-\frac{1}{2}\in[-1;1]$$

Полученная точка принадлежит заданному отрезку, значит вычислим значение функции в этой точке.

$$F\left(-\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{-1/2}\frac{2t+1}{t^2-2t+2}$$

После преобразований получаем, что

$$F\left(-\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{-1/2}\frac{(2t+1)dt}{t^2-2t+2}=\left(\ln\left|t^2-2t+2\right|-3arctg(t-1)\right)\Big|_0^{-1/2}=\ln\frac{13}{8}-3arctg\frac{3}{2}+\frac{3\pi}{4}.$$

Затем вычислим значение функции на концах отрезка:

$$F(-1)=\ln\frac{13}{8}-3arctg\frac{3}{2}+\frac{3\pi}{4}$$

$$F(1)=-\ln 2+\frac{3\pi}{4}$$

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что: наибольшее значение функции достигается в точке $x=1$, наименьшее значение функции достигается в точке $x=-\frac{1}{2}$.

Пример 9. Решить дифференциальное уравнение: а) $y(x)=\int\limits_0^x y(t)dt+x+1$

Решение. Продифференцируем обе части равенства по переменной x

$y'(x)=y(x)+1$, $y'=y+1$.

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим общее решение: $y=ce^x-1$.

Так как $y(0)=\int\limits_0^0+0+1=1$; $1=c-1^0$; $c=2$, то имеем начальное условие $y(0)=1$, что позволит найти $c=2$.

Ответ: $y=2e^x-1$.

Пример 10. Найти все функции $f(x)$, непрерывные на $[0;+\infty)$, для которых

$$\sin\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{x}{x+1}.$$

Решение. Рассмотрим выражение $\sin\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{x}{x+1}$

Выразим интеграл с переменным верхним пределом:

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = \left(\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)'$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x}}$$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x}}$

Заключение

Таким образом, многие нестандартные задачи можно решить с применением понятия «Интеграл с переменным верхним пределом». При этом используются различные способы и преобразования. Ведении понятия интеграла, рассмотрение его свойств, отработка техники интегрирования способствует осознанному качественному усвоению материала, развитию правильного представления об изучаемом понятии, его огромной значимости в различных науках.

Список литературы

1. Высшая математика: учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск: Выш. шк., 2012. – с.211

2. Применение интегралов в физике [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://mccme.ru/mmmf-lectures/books/books/book.23.pdf – Дата доступа: 9.11.2020