НЕКОТОРЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОНЯТИЯ «СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ»

Гуцко Т. Н.

УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», факультет математики и информатики, специальность «Управление информационными ресурсами», кафедра системного программирования и компьютерной безопасности.

Научный руководитель - Сетько Е.А., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, ГрГУ им. Я. Купалы

Резюме

Во введении указан объект исследования – понятие «Сложная функция». В основной части рассмотрены примеры решений задач, использующих данное понятие. Некоторые задачи обобщены: применена параметризация для увеличения вариативности заданий.

Целью исследования является углубление знаний по теме «Сложная функция», а также рассмотрение и структуризация некоторых нестандартных задач, для решения которых используются исследуемое понятие и различные специальные методы.

В заключении приведены выводы, которые основаны на анализе решенных в ходе исследования задач, их актуальность, а также подведены итоги исследования.

Ключевые слова: сложная функция, производная, непрерывность функции, дифференциал, параметризация.

Пусть заданы функции f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$. Функция $\varphi: X \to Z$, определяемая по формуле $\varphi(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией* или *суперпозицией функций* $y = f(x)$ и $z = g(y)$ [2, с. 140].

Задача 1. Найти $f_n(x) = f\left(f\left(f(f\ldots f(x))\right)\right)$, если $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Пользуясь определением сложной функции, сначала найдём $f(f(x))$. Подставим выражение $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ в исходное, имеем:

$$f(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}} == \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)\cdot(1+\frac{x^2}{1+x^2})}}.$$

После преобразований придём к следующему выражению: $f(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

Теперь найдём $f\left(f(f(x))\right)$, подставив в полученное выражение $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$f\left(f(f(x))\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} == \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)\cdot(1+\frac{2x^2}{1+x^2})}}.$$

Преобразуем полученное выражение, в результате чего получим: $f\left(f(f(x))\right) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

Заметим закономерность: с каждым разом коэффициент при неизвестной x в знаменателе увеличивается на 1. Таким образом, придём к выводу, что $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Истинность нашего вывода несложно проверяется с использованием метода математической индукции.

В курсе высшей математики чаще всего понятие сложной функции использует теория дифференцирования в теореме о производной сложной функции и её практическом применении, а также в тема «Дифференциальные уравнения». Часто задачи, предлагаемые на студенческих олимпиадах по математике, формулируются с использованием этого понятия, поэтому при подготовке к олимпиадам различного уровня следует рассмотреть их более подробно, используя различные задания из сборников олимпиадных задач [1, 3-5].

На наш взгляд, задачи по теме «Сложная функция» можно разбить на несколько групп, в зависимости от метода решения.

К первой группе можно отнести задачи, решение которых требуют использование теоремы о производной сложной функции для нахождения производной.

Задача 2. Найти $f'(0)$, если $f(x) = (3x+2)\cdot f(x^2) + 2$.

Решение. Для начала вычислим производную исходной функции:

$$f(x) = 3\cdot f(x^2) + f'(x^2)\cdot 2x\cdot(3x+2).$$

Подставим число *0* вместо неизвестной x в полученное выражение и условие. В результате получим $f'(0) = 3\cdot f(0)$ и $f(0) = 2\cdot f(0) + 2$. Отсюда $f'(0) = -6$.

Задача 3. Известно, что $g(x) = f(f(x))$, $f(2) = 2$ и $g'(2) = 3$. Функция $f(x)$ возрастает в окрестности точки 2. Найти $f'(2)$.

Решение. Используя теорему о производной сложной функции, найдём, что

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Подставим в данное выражение $x = 2$: $g'(2) = f'(f(2)) \cdot f'(2)$. Используя данные из условия задачи, преобразуем полученное выражение: $3 = f'(2) \cdot f'(2)$. Согласно достаточному условию монотонности функции, для возрастающей функции производная положительна, отсюда $f'(2) = \sqrt{3}$.

В любых математических задачах можно выделить существенные и несущественные элементы. Идея задачи заключается в существенной части. Поэтому акцентируя внимание на существенные элементы, несущественные могут выступать в качестве параметров. Таким образом, можно разработать схему общего решения и, меняя значения несущественных элементов, получать одинаковые по сущности, но разные по формулировке условия задачи. То есть, используя параметризацию, можно увеличить вариативность задачи.

Часто преподавателям необходимо придумывать огромное количество различных, но одновременно однотипных и сравнимых по сложности, заданий. При этом задачи должны быть составлены таким образом, чтобы ответы получились «хорошими». В этом случае введение параметров значительно упрощает работу.

Предложим обобщение для задач, описанных выше.

Задача 4. Найти $f'(d)$, если $f(x) = (ax + b) \cdot f(x^n) + c$.

Решение. Используя тот же метод, что и при решении первой задачи, получим:

$f'(d) = a \cdot f(d^n) + f'(d^n) \cdot nd^{n-1} \cdot (ad + b)$, где $f(d) = (ad + b) \cdot f(d^n) + c$.

Рассмотрим следующий диапазон изменения параметров: $d = 0$ и $d = 1$ (для любых значений переменной n); $d = -1$ (если n – нечётное число); для остальных случаев - $n = 1$.

Задача 5. Известно, что $g(x) = f(f(x))$, $f(z) = z$ и $g'(z) = t$. Найти $f'(z)$, если функция f(x) возрастает (убывает) в окрестности точки z.

Решение. Подставим в выражение для производной сложной функции переменную z вместо неизвестной x:

$$g'(z) = f'\big(f(z)\big) \cdot f'(z) = f'(z) \cdot f'(z).$$

Отсюда определим, что $f'(z) = \sqrt{t}$ в случае, если функция возрастает в окрестности точки z, и $f'(z) == -\sqrt{t}$, если функция убывает в окрестности точки z.

Задача 6. Составить уравнение касательной к графику чётной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 1$, если для всех действительных x справедливо равенство:

$$f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$$

Решение. Подставим в исходное выражение $x = 1$: $f(1) - 4f(-1) = -9$. Из определения чётной функции следует, что $f(-x) = f(x)$. Значит, $f(-1) = f(1)$. Таким образом, получим следующее выражение $f(1) - -4f(1) = -9$. Отсюда $f(1) = 3$.

Найдём производную выражения, $f(2x^3 - x) - 4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1)$, используя теорему о производной сложной функции:

$$f'(2x^3 - x) - \big(4x^2 \cdot f(x^2 - x - 1)\big)' =$$
$$= f'\ (2x^3 - x) \cdot 6x^2 - 8x \cdot f(x^2 - x - 1) - 4x^2 \cdot f'\ (x^2 - x - 1) \cdot (2x - 1).$$

Подставим в полученное выражение $x = 1$, в результате чего получим:

$$6f'(1) - 8f(1) - 4f'(1).$$

Найдём производную правой части исходного равенства:

$$(8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2)' = 40x^4 - 24x^3 - 22x.$$

Приравняем обе найденные производные. $f'(1) - 4f(1) = 20x^4 - 12x^3 - 11x$.

Так как $f(1) = 3$, придём к выражению следующего вида:

$f'(1) = 20x^4 - 12x^3 - 11x + 12$. Полагая, что $x = 1$, найдём, что $f'(1) = 9$.

Так как уравнение касательной к графику функции имеет следующий вид:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, получим искомое уравнение $y = 9(x - 1) + 3$.

Во вторую группу можно объединить задачи, решение которых сводится к системе двух или более уравнений.

Задача 7. Функция f(x)при x>0 удовлетворяет условию $2f(x) + 3f(\frac{2010}{x}) = 5x$. Найти значение $f(6)$.

Решение. Подставим в первоначальное выражение $x=6$ и $x=335$. Составим систему:

$$\begin{cases} 2f(6) + 3f(335) = 30; \\ 2f(335) + 3f(6) = 1675. \end{cases}$$

Решая данную систему, определим, что $f(6) = 993$.

Задача 8. Найдите f(x), если $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$.

Решение. Для начала проведём замену, где $t = \frac{1}{1-x}$. Отсюда найдём, что $x = \frac{t-1}{t}$.

Подставим полученное выражение в исходное: $f(\frac{t-1}{t}) + f(t) = \frac{t-1}{t}$. Так как обозначение для аргумента функции не имеет значения, вернемся к исходным обозначениям, то есть выполним ещё одну замену, где $x == t$. В результате получим следующее выражение:

$f(\frac{x-1}{x}) + f(x) = \frac{x-1}{x}$. Подставим в первоначальное выражение $\frac{1}{1-x}$ вместо неизвестной x. В итоге получим:

$$f(\frac{1}{1-x}) + f(\frac{1-x}{-x}) = \frac{1}{1-x}.$$

Далее составим систему:

$$\begin{cases} f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x; \\ f(\frac{x-1}{x}) + f(x) = \frac{x-1}{x}. \end{cases}$$

В результате преобразований придём к следующей равносильной системе:

$$\begin{cases} f(x) + \frac{1}{1-x} - f(\frac{x-1}{x}) = x; \\ f(\frac{x-1}{x}) + f(x) = \frac{x-1}{x}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений методом сложения, найдём, что искомая функция будет иметь вид: $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$.

Задача 9. Найдите f(x), если $f(\frac{x+1}{x}) - 5f(\frac{x}{x+1}) = 12x + 6$.

Решение. 1) Сделаем замену $t = \frac{x}{x+1}$, откуда выразим $x = \frac{t}{1-t}$. Подставим полученную переменную в первоначальное выражение:

$$f(\frac{1}{t}) - 5f(t) = \frac{12t}{1-t} + 6.$$

Полагая, что x=t, получим уравнение следующего вида:

$$f(\frac{1}{x}) - 5f(x) = \frac{6+6x}{1-x}.$$

2) Сделаем замену $y = \frac{x+1}{x}$, откуда выразим $x = \frac{1}{y-1}$. Подставим новую переменную в исходное выражение:

$$f(y) - 5f(\frac{1}{y}) = \frac{12}{y-1} + 6.$$

Полагая, что x=y, придём к уравнению следующего вида:

$$f(x) - 5f(\frac{1}{x}) = \frac{6x+6}{x-1}.$$

Составим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} f(x) - 5f(\frac{1}{x}) = \frac{6x+6}{x-1}; \\ f(\frac{1}{x}) - 5f(x) = \frac{6+6x}{1-x}. \end{cases}$$

Решим систему уравнений методом сложения. В результате найдём выражение для искомой функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Для рассмотренных задач второй группы также можно предложить ввести параметризацию. Например, введём параметры для задачи 7.

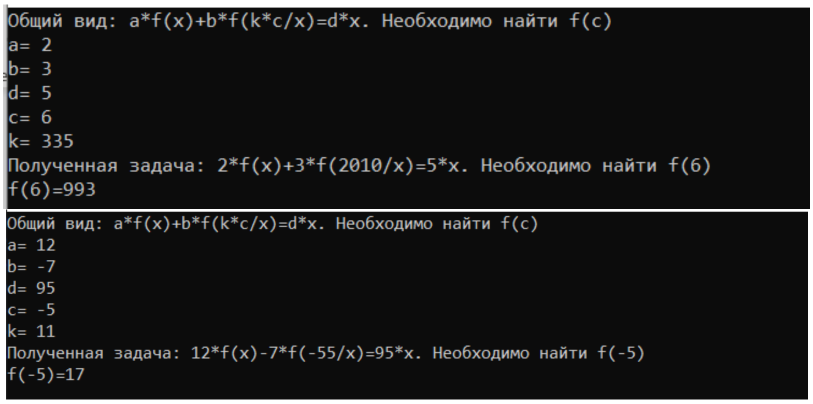
Задача 10. Функция f(x) при $x>0$ удовлетворяет следующему условию:

$a \cdot f(x) + b \cdot f\left(\frac{k \cdot c}{x}\right) = d \cdot x$. Требуется найти $f(c)$.

Решение. В условии задачи содержится структура $\frac{k \cdot c}{x}$, которая необходима для того, чтобы в ответе не получалось дробных чисел. Подставим вместо неизвестной x=c и x=k. В результате чего решение задачи будет сведено к системе уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot f(c) + b \cdot f(k) = d \cdot c; \\ a \cdot f(k) + b \cdot f(c) = d \cdot k. \end{cases}$$

Можно предложить реализацию данной задачи на C#. Напишем программу, где пользователь будет вводить значения параметров a, b, c, d, k. Затем программа методом перебора подставляет в систему различные значения $f(c)$ и $f(k)$ до тех пор, пока не будут найдены значения, удовлетворяющие условию. Примеры реализации алгоритма решения задачи (рис. 1):



```
Общий вид: a*f(x)+b*f(k*c/x)=d*x. Необходимо найти f(c)
a= 2
b= 3
d= 5
c= 6
k= 335
Полученная задача: 2*f(x)+3*f(2010/x)=5*x. Необходимо найти f(6)
f(6)=993
```

```
Общий вид: a*f(x)+b*f(k*c/x)=d*x. Необходимо найти f(c)
a= 12
b= -7
d= 95
c= -5
k= 11
Полученная задача: 12*f(x)-7*f(-55/x)=95*x. Необходимо найти f(-5)
f(-5)=17
```

Рисунок 1

Часто на олимпиадах по математике предлагают задания, которые содержат год проведения олимпиады. Введём некоторые числовые значения параметров и сформулируем задачу для 2020 года на примере задачи 9.

Задача 11. Найдите $f(x)$, если $f\left(\frac{2020}{x-1}\right)+3f\left(\frac{x-1}{2020}\right)=10x$.

Решение. Проведём замену: $t=\frac{2020}{x-1}$, откуда $x=\frac{2020+t}{t}$. В результате подстановки новой переменной получим уравнение следующего вида:

$$f(t)+3f(\frac{1}{t})=\frac{20200+10t}{t}$$

Обозначение для аргумента функции не имеет значения, поэтому вернёмся к первоначальным обозначениям, проведя ещё одну замену, где $x=t$. Таким образом, получим выражение:

$$f(x)+3f(\frac{1}{x})=\frac{20200+10x}{x}$$

Сделаем замену, где $y=\frac{x-1}{2020}$. Отсюда определим, что $x=2020y+1$. Подставим новую переменную в исходное выражение:

$$f(\frac{1}{y})+3f(y)=20200y+10.$$

Полагая, что $y=x$, придём к следующему выражению:

$$f(\frac{1}{x})+3f(x)=20200x+10.$$

Составим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{20200+10x}{x}; \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=20200x+10. \end{cases}$$

Решим систему методом сложения. В результате чего найдём $f(x)=\frac{15150x^2+5x-505}{2x}$.

Введём числовые значения параметров и сформулируем задачу для 2020 года на основе задачи 10.

Задача 12. Функция $f(x)$ при $x>0$ удовлетворяет следующему условию: $7f(x)-5f(\frac{2020}{x})=8x$. Найдите $f(4)$.

Решение. Подставим в исходное выражение $x=4$ и $x=505$. Составим систему:

$$\begin{cases} 7f(4)-5f(505)=32, \\ 7f(505)-5f(4)=4040. \end{cases}$$

Решая данную систему, определим, что $f(4)=851$.

Таким образом, мы выделили две группы, в зависимости от метода решений заданий. Но иногда задачи по теме «Сложная функция» требуют использование разных методов решений их и комбинаций.

Зачастую, когда решение задания сводится к системе двух и более уравнений, данную систему можно решить матричным способом.

Задача 13. Найти все функции f: $\mathbb{R}^{\setminus\{0\}}\longrightarrow\mathbb{R}$ такие, что $-3f(-x)+f(\frac{1}{x})+f(x)=x$, если $x\neq 0$.

Рассмотрим четыре случая. Подставим вместо неизвестной в первоначальное выражение $x, -x, -\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$ и составим систему.

$$\begin{cases} -3f(-x)+f(\frac{1}{x})+f(x)=x; \\ -3f(x)+f(-\frac{1}{x})+f(-x)=-x; \\ -3(-\frac{1}{x})+f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}; \\ -3f(\frac{1}{x})+f(-x)+f(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Сделаем замену, где $t=f(x), z=f(-x), y=f(\frac{1}{x}), d=f(-\frac{1}{x})$. Преобразуем систему, подставив в выражения новые переменные:

$$\begin{cases} -3z+y+t+0d=x; \\ z+0y-3t+d=-x; \\ 0z+y+t-3d=\frac{1}{x}; \\ z-3y+0t+d=-\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Будем искать требуемое решение системы методом Крамера [2, с. 52]. Составим матрицу системы и найдём её определитель, используя теорему Лапласа.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

По теореме Лапласа определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения [2, с. 36]. Вычислим определитель данной матрицы по 1-ому столбцу: $\Delta=1\cdot A_{41}=(-1)\cdot M_{41}=45$, найдём определитель для 3-его столбца, полученный из матрицы заменой данного столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -3 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & -x & 1 \\ 0 & 1 & 1/x & -3 \\ 1 & 3 & -1/x & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 10 & (x^2-3)/x & 3 \\ 0 & -3 & (1-x^2)/x & 0 \\ 0 & 1 & 1/x & -3 \\ 1 & 3 & -1/x & 1 \end{vmatrix}$$

По теореме Лапласа: $\Delta_3=1\cdot A_{41}=(-1)^5\cdot M_{41}$. То есть $\Delta_3=-\begin{vmatrix} 10 & (x^2-3)/x & 3 \\ -3 & (1-x^2)/x & 0 \\ 1 & 1/x & -3 \end{vmatrix}$. Используя свойства определителя, получим:

$$\Delta_3=-\begin{vmatrix} 11 & x-2/x & 0 \\ -3 & (1-x^2)/x & 0 \\ 1 & 1/x & -3 \end{vmatrix}=-(-3)\cdot(-1)^6\cdot \mathrm{M}_{33}=\frac{51-24x^2}{x}.$$

Тогда по формулам Крамера получим $t=f(x)=\frac{51-24x^2}{x}$.

Задача 14. Существует ли функция $f(x)$, дифференцируемая на числовой прямой и для всех x, удовлетворяющая условию $f'(f(x)+f'(x))=2x^2$?

Решение. Предположив, что искомая функция является линейной, не получим требуемого тождества. Предположим, что искомая функция является квадратичной, то есть

$f(x)=ax^2+bx+c$, тогда производная ее равна $f'(x)=2ax+b$.

Следовательно, $f'(f(x)+f'(x))=2a(ax^2+bx+c+2ax+b)+b$.

Тогда $2a^2x^2+2abx+2ac+4a^2x+2ab+b=2x^2$. Найдем конкретные значения неизвестных параметров, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Приведя подобные слагаемые в полученном выражении, составим систему:

$$\begin{cases} 2a^2=2; \\ 2ab-4a^2=0; \\ 2ac+2ab+b=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, определим, что $a=\pm1, b=-2, c=3$. Значит, существует по крайней мере одна функция, удовлетворяющая условию задачи. И это функция $f(x)=x^2-2x+3$.

Введём параметризацию для данного задания.

Задача 15. Существует ли функция $f(x)$, дифференцируемая на числовой прямой и для всех x, удовлетворяющая условию $f''(f'(x) + f''(x)) = Dx^2$, где D – параметр.

Решение. Пусть $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, тогда $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ и $f''(x) = 6ax + 2b$. Отсюда найдём, что $f''(f'(x) + f''(x) = 6a(3ax^2 + 2bx + c + 6ax + 2b) + 2b = Dx^2$.

Раскрыв скобки в полученном выражении, придём к уравнению следующего вида:

$$18a^2x^2 + 12abx + 6ac + 36a^2x + 12ab + 2b = Dx^2.$$

Найдём значения неизвестных параметров, приравнивая коэффициента при одинаковых степенях переменной. Приведём подобные слагаемые в полученном выражении и составим систему:

$$\begin{cases} 18a^2 = D, \\ 12ab + 36a^2 = 0, \\ 6ac + 12ab + 2b = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим значение a.Так как $18a^2 = D$, отсюда $a^2 = \frac{D}{18}$. Для того, чтобы получить «красивые» ответы, проведем замену, где $D = 2w^2$. Тогда $a = \pm\frac{w}{3}$.

Пусть $a = \frac{w}{3}$. Преобразуем второе уравнение системы: $a(b + 3a) = 0$, в результате чего определим, что $a = 0$ (данный вариант не подходит, так как по условию системы $a \neq 0$) либо $b = -3a$. Тогда $b = -w$.

Выразим из третьего уравнения значение c. Так как $3ac + 6ab + b = 0$, подставим в данное выражение значения параметров a и b: $w(c - 2w - 1) = 0$. Отсюда $w = 0$ (не удовлетворяет условию системы) или $c == 2w + 1$.

Теперь для параметра w можно вводить числовые значения и таким образом выражать значение параметра D. В результате чего получать новые условия задачи.

Заключение

Таким образом, понимая аналитическое задание функции как модель, можно решать многие нестандартные задачи с использованием понятия «Сложная функция». При этом применяются различные стандартные методы и преобразования. Например, решение может сводиться к системе линейных уравнений или использованию теоремы о производной сложной функции. Используя анализ условия и решения, можно разрабатывать новые задачи, при помощи введения параметров, и таким образом лучше понимать суть решаемых заданий.

Список литературы

1. Беркович Ф. Д., Федий В. С., Шлыков В. И. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учеб. пособие. Ростов н/Д: Феникс, 2008. 171 с.
2. Высшая математика: учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск: Выш. шк., 2012. – 391 с.: ил.
3. Луценко Л. И. Сборник задач повышенной трудности по высшей математике для подготовки к студенческим олимпиадам. Горловка: ГВУЗ «ДонНТУ» АДИ, 2010. 95
4. Садовничий В. А., Подколзин А. С. Задачи студенческих олимпиад по математике: пособие для студентов вузов. 2-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2003. 208 с.
5. Шахматов В. М., Лисок А. Л., Тарбокова Т. В. Сборник олимпиадных задач по высшей математике: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета,2009.144с.