ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ЛАГРАНЖА И ЭРМИТА-ФЕЙЕРА

И. А. Козак

УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», факультет математики и информатики, специальность «Математика (научно-педагогическая деятельность)», кафедра фундаментальной и прикладной математики

Научный руководитель - Е. А. Ровба, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Тригонометрическое интерполирование является хорошо разработанной областью полиномиальных приближений. В настоящей работе рассмотрены вопросы рационального тригонометрического интерполирования.

Цель работы: построить и исследовать свойства интерполяционных рациональных тригонометрических процессов Лагранжа и Эрмита-Фейера.

Во введении рассматриваются общие понятия и сведения, необходимые для исследований по данной теме.

В основной части рассмотрены интерполяционные рациональные тригонометрические процессы Лагранжа и Эрмита-Фейера, а также получены и доказаны свойства данных процессов.

В заключении излагаются краткие результаты данной работы.

Данный материал может быть использован в качестве дополнительного образовательного материала по дисциплинам фундаментальной и прикладной математики.

Ключевые слова: рациональная тригонометрическая дробь, интерполяционная функция, узлы интерполирования.

Введение. Пусть задано $2n+1$ различных точек $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n}$ $(0 \le Re\theta_k < 2\pi; k = 0,1,\dots,2n)$. Точки $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n}$ будем называть узлами интерполирования. Полиномы вида

$$t_k(\theta) = A\, sin\frac{\theta-\theta_0}{2} \dots sin\frac{\theta-\theta_{k-1}}{2} sin\frac{\theta-\theta_{k+1}}{2} \dots sin\frac{\theta-\theta_{2n}}{2},$$

где A − некоторая постоянная, называются фундаментальными полиномами тригонометрического интерполирования. Полином вида

$$g_n(\theta) = \sum_{k=0}^{2n} y_k\, t_k(\theta)$$

называется формулой Лагранжа тригонометрического интерполирования. Тригонометрический полином принимает в узлах интерполирования заданные значения $y_0, y_1, \dots, y_{2n}$:

$$g_n(\theta_i) = y_i, i = 0,1,\dots,2n.$$

При этом данное условие определяет тригонометрический полином порядка не выше n единственным образом [1,с.18,124].

Основная часть.

1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ЛАГРАНЖА

Пусть заданы произвольные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, |\alpha_k| < 1, k = 1,2,\dots,n$. Рассмотрим функцию

$$S_n(x) = \sin \int_0^x \lambda_n(u)du, \tag{1.1}$$

где

$$\lambda_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}, \tag{1.2}$$

$$\theta_k = arg\alpha_k, k = 1,2,\dots,n.$$

Лемма 1.1. Функция $S_n(x)$ является рациональной тригонометрической дробью вида

$$S_n(x) = \frac{q_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1-2|\alpha_k|\cos(x-\theta_k)+|\alpha_k|^2)},$$

где $q_{n+\frac{1}{2}}(x)$ − некоторый тригонометрический полином полуцелого порядка $n+\frac{1}{2}$ [1, с.18].

Доказательство. Применим к функции $S_n(x)$ некоторые алгебраические и тригонометрические преобразования

$$S_n(x) = \sin\int_0^x \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}\right)du =$$

$$= sin\left(\int_0^x \frac{1}{2}du + \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du\right) =$$

$$= \sin\frac{x}{2}\cdot cos\int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du + +\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du.$$

Воспользуемся формулами Эйлера для функций $\sin x$ и $\cos x$:

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

Будем иметь:

$$S_n(x) = \sin\frac{x}{2}\cdot cos\int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du +$$

$$+\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\int_0^x \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du =$$

$$= \sin\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{i\int_0^x\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du} + e^{-i\int_0^x\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du}}{2} +$$

$$+\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{i\int_0^x\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du} - e^{-i\int_0^x\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du}}{2i}.$$

Введем следующие обозначения:

$$u_n(x) = e^{i\int_0^x\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du},$$

$$u_n^{-1}(x) = e^{-i\int_0^x\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du}.$$

Тогда $S_n(x)$ будет представимо в виде:

$$S_n(x) = \sin\frac{x}{2}\cdot\frac{u_n(x)+u_n^{-1}(x)}{2} + \cos\frac{x}{2}\cdot\frac{u_n(x)-u_n^{-1}(x)}{2i}.$$

Домножим и разделим второе слагаемое на i, тогда функция $S_n(x)$ будет иметь вид

$$S_n(x) = \sin\frac{x}{2}\cdot\frac{u_n(x)+u_n^{-1}(x)}{2} + i\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{u_n(x)-u_n^{-1}(x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cdot\cos\frac{x}{2}\right)\cdot u_n(x) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + i\cdot\cos\frac{x}{2}\right)\cdot u_n^{-1}(x).$$

Воспользуемся следующим представлением [2, с.3-28]:

$$u_n(x) = e^{i\int_0^x\sum_{k=1}^n\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du} == \prod_{k=1}^{n}\frac{e^{i\cdot 0}-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}e^{i\cdot 0}}\cdot\frac{1-\overline{\alpha_k}e^{ix}}{e^{ix}-\alpha_k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}}\cdot\frac{1-\overline{\alpha_k}e^{ix}}{e^{ix}-\alpha_k};$$

Тогда получим следующее выражение:

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}}\cdot\frac{1-\overline{\alpha_k}e^{ix}}{e^{ix}-\alpha_k} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}}{1-\alpha_k}\cdot\frac{e^{ix}-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}e^{ix}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)^2(1-\overline{\alpha_k}e^{ix})^2}{\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha_k})(1-\alpha_k)(e^{ix}-\alpha_k)\,(1-\overline{\alpha_k}e^{ix})} +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha_k})^2(e^{ix}-\alpha_k)^2}{\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha_k})(1-\alpha_k)(e^{ix}-\alpha_k)\,(1-\overline{\alpha_k}e^{ix})}.$$

В правой части полученного выше равенства представим выражение $(1-\overline{\alpha_k}e^{ix})^2$ в виде произведения и вынесем множитель e^{ix} за скобки одного из множителей:

$$S_n(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)^2\,(1-\overline{\alpha_k}e^{ix})(e^{-ix}-\overline{\alpha_k})e^{ix}}{\prod_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)(e^{-ix}-\overline{\alpha_k})\,(e^{ix}-\alpha_k)e^{ix}}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha_k})^2\,(1-\alpha_k e^{-ix})(e^{ix}-\alpha_k)e^{ix}}{\prod_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)(e^{-ix}-\overline{\alpha_k})\,(e^{ix}-\alpha_k)e^{ix}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)^2\,(1-\overline{\alpha_k}e^{ix})(e^{-ix}-\overline{\alpha_k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)(e^{-ix}-\overline{\alpha_k})\,(e^{ix}-\alpha_k)}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha_k})^2\,(1-\alpha_k e^{-ix})(e^{ix}-\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)(e^{-ix}-\overline{\alpha_k})\,(e^{ix}-\alpha_k)}.$$

Раскроем скобки и получим:

$$S_n(x)=\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)^2\left(e^{-ix}-\overline{\alpha_k}-\overline{\alpha_k}-\overline{\alpha_k}^2e^{ix}\right)}{2\prod_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)(1-\alpha_k e^{-ix}-\overline{\alpha_k}e^{ix}-\overline{\alpha_k}\cdot\alpha_k)}+$$

$$+\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}(1-\overline{\alpha_k})^2\left(e^{ix}-\alpha_k-\alpha_k-\alpha_k^2e^{-ix}\right)}{2\prod_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)(1-\alpha_k e^{-ix}-\overline{\alpha_k}e^{ix}-\overline{\alpha_k}\cdot\alpha_k)}.$$

Обозначим

$$t_n(x)=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1-\alpha_k)^2}{(1-|\alpha_k|^2)}(e^{ix}-2\alpha_k-\alpha_k^2e^{-ix}),$$

$$\overline{t_n(x)}=\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1-\alpha_k)^2}{(1-|\alpha_k|^2)}(e^{-ix}-2\overline{\alpha_k}-\overline{\alpha_k}^2e^{ix}),$$

где $t_n(x)$, $\overline{t_n(x)}$ – некоторые тригонометрические полиномы порядка не выше n. Тогда функция $S_n(x)$ примет вид:

$$S_n(x)=\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\overline{t_n(x)}+\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)t_n(x)}{w_n(x)},\tag{1.3}$$

где $w_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1-2|\alpha_k|\cos(x-\theta_k)+|\alpha_k|^2)$.

Представим полиномы $t_n(x)$, $\overline{t_n(x)}$ в виде:

$$t_n(x)=p_n^{(1)}(x)+iq_n^{(1)}(x),$$

$$\overline{t_n(x)}=p_n^{(1)}(x)-iq_n^{(1)}(x),$$

так как $t_n(x)$, $\overline{t_n(x)}$ - комплексно-сопряженные. Здесь под $p_n^{(1)}(x)$ и $q_n^{(1)}(x)$ будем понимать некоторые действительные тригонометрические полиномы порядка не выше n. Тогда (1.3) перепишем в виде:

$$S_n(x)=\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\overline{t_n(x)}+\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)t_n(x)}{w_n(x)}=$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)\left(p_n^{(1)}(x)-iq_n^{(1)}(x)\right)}{w_n(x)}+$$

$$+\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)\left(p_n^{(1)}(x)+iq_n^{(1)}(x)\right)}{w_n(x)}.$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$S_n(x) = \frac{p_n^{(1)}(x)\sin\frac{x}{2} - i\,p_n^{(1)}(x)\cos\frac{x}{2} - iq_n^{(1)}(x)\sin\frac{x}{2} - q_n^{(1)}(x)\cos\frac{x}{2}}{w_n(x)} +$$

$$+\frac{p_n^{(1)}(x)\sin\frac{x}{2} + i\,p_n^{(1)}(x)\cos\frac{x}{2} + iq_n^{(1)}(x)\sin\frac{x}{2} - q_n^{(1)}(x)\cos\frac{x}{2}}{w_n(x)} =$$

$$= \frac{2\left(p_n^{(1)}(x)\sin\frac{x}{2} - q_n^{(1)}(x)\cos\frac{x}{2}\right)}{w_n(x)}.$$

Таким образом, функция $S_n(x)$ является рациональной тригонометрической дробью полуцелого порядка $n+\frac{1}{2}$ [1].

Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. Функция $S_n(x)$ имеет $2n+1$ различный нуль $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ на полуинтервале $[0, 2\pi)$.

Доказательство. Для нахождения нулей тригонометрической функции $S_n(x) = \sin\int_0^x \lambda_n(u)du$ введем обозначение

$$\varphi_n(x) = \int\limits_0^x \lambda_n(u)du.$$

Легко найти, что

$$\varphi'_n(x) = \lambda_n(x) > 0, x \in [0, 2\pi).$$

Значит, функция $\varphi(x)$ возрастает на промежутке $[0,2\pi]$, так как ее производная положительна. Тогда найдем значения функции $\varphi(x)$, которые она принимает на границах отрезка $[0,2\pi]$.

$$\varphi_n(0) = 0,$$

$$\begin{gathered}\varphi_n(2\pi) = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}\right)du = \frac{1}{2}\cdot 2\pi + \\ + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}du = \\ = \pi + \sum_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)\int\limits_0^{2\pi}\frac{du}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Вычислим значение интеграла. Для этого выполним соответствующую замену $u - \theta_k = v, du = dv$.

$$\int\limits_{-\theta_k}^{2\pi-\theta_k}\frac{dv}{1-2|\alpha_k|\cos v+|\alpha_k|^2}.$$

Так как подынтегральное выражение является 2π-периодической функцией, то значение интеграла на сдвинутом отрезке длины 2π равны. Тогда последний интеграл перепишем в виде

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dv}{1-2|\alpha_k|\cos v+|\alpha_k|^2}.$$

Вычислим этот интеграл с помощью теории вычетов. Для этого выполним замену:

$$z = e^{iv},$$

$$\cos v = \frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$dv = \frac{dz}{iz}.$$

Получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dv}{1-2|\alpha_k|\cos v+|\alpha_k|^2} = \int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(1-2\cdot|\alpha_k|\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+|\alpha_k|^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z-|\alpha_k|z^2-|\alpha_k|+|\alpha_k|^2 z} = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{-|\alpha_k|z^2+(1+|\alpha_k|^2)z-|\alpha_k|}.$$

Найдем нули знаменателя:

$$-|\alpha_k|z^2+(1+|\alpha_k|^2)z-|\alpha_k| = 0,$$

$$D = (1+|\alpha_k|^2)^2 - 4|\alpha_k|^2 = 1+2|\alpha_k|^2+|\alpha_k|^4-4|\alpha_k|^2 =$$

$$= 1-2|\alpha_k|^2 + +|\alpha_k|^4 = (1-|\alpha_k|^2)^2 > 0,$$
$$z_1 = \frac{-(1+|\alpha_k|^2)+(1-|\alpha_k|^2)}{-2|\alpha_k|} = \frac{-2|\alpha_k|^2}{-2|\alpha_k|} = |\alpha_k|,$$
$$z_2 = \frac{-(1+|\alpha_k|^2)-(1-|\alpha_k|^2)}{-2|\alpha_k|} = \frac{-2}{-2|\alpha_k|} = \frac{1}{|\alpha_k|}.$$

Нули многочлена являются полюсами 1-ого порядка, при этом, полюс z_1 принадлежит единичной окружности, z_2 – не принадлежит. Значит, значение интеграла будет равно вычету подынтегрального выражения в точке z_1. Тогда решим данный интеграл с помощью вычетов:

$$\frac{1}{i}\int\limits_{|z|<1} \frac{dz}{-|\alpha_k|z^2 + (1+|\alpha_k|^2)z - |\alpha_k|} =$$
$$= \frac{1}{i}\operatorname*{res}_{z\to z_1} \frac{1}{-|\alpha_k|z^2 + (1+|\alpha_k|^2)z - |\alpha_k|}\cdot 2\pi i =$$
$$= \frac{1}{i}\operatorname*{res}_{z\to z_1} \frac{1}{-|\alpha_k|(z-|\alpha_k|)\left(z-\frac{1}{|\alpha_k|}\right)}\cdot 2\pi i =$$
$$= \frac{1}{i}\lim_{z\to z_1} \frac{(z-|\alpha_k|)}{-|\alpha_k|(z-|\alpha_k|)\left(z-\frac{1}{|\alpha_k|}\right)}\cdot 2\pi i =$$
$$= \frac{1}{i}\lim_{z\to z_1} \frac{1}{-|\alpha_k|\left(z-\frac{1}{|\alpha_k|}\right)}\cdot 2\pi i = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{-|\alpha_k|\left(|\alpha_k|-\frac{1}{|\alpha_k|}\right)}\cdot 2\pi i =$$
$$== \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-|\alpha_k|^2}\cdot 2\pi i = \frac{2\pi}{1-|\alpha_k|^2}.$$

Искомый интеграл равен $\frac{2\pi}{1-|\alpha_k|^2}$.

Соответственно, (1.4) будет иметь вид

$$\varphi_n(2\pi) = \pi + \sum_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|^2)\cdot\frac{2\pi}{(1-|\alpha_k|^2)} = \pi + 2\pi n = (2n+1)\pi.$$

По теореме Больца-Вейерштрасса о промежуточных значениях непрерывной функции каждое из уравнений

$$\varphi_n(x) = \pi k, k = 0,1,\dots,2n$$

будет иметь единственное решение $x = x_k$ на $[0,2\pi)$, то есть

$$sin\varphi_n(x_k) = 0, k = 0,1,\dots,2n,$$
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < 2\pi.$$

Что и требовалось доказать. ■

Теорема 1.1. Интерполяционная рациональная функция $r_n(x)$ с узлами $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ может быть представлена в виде

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x), \tag{1.5}$$

где

$$t_k(x) = \frac{S_n(x)}{2\sin\frac{x-x_k}{2}S_n'(x_k)}, k = 0,1,2,\dots,2n, \tag{1.6}$$

$y_0, \dots, y_{2n} \in \mathbb{R}$.

Причем она является тригонометрической рациональной функцией порядка не выше n следующего вида:

$$L_n(x) = \frac{q_n(x)}{w_n(x)}, \tag{1.7}$$

где $q_n(x)$ – некоторый тригонометрический полином порядка не выше n, $w_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 - -2|\alpha_k|\cos(x-\theta_k) + |\alpha_k|^2)$.

Доказательство. 1. Покажем, что $L_n(x) = y_n, k = \overline{0,2n}$, то есть, что

$$t_k(x_m) = \begin{cases} 0, m \neq k; \\ 1, m = k, m, k = 0,1,\dots,2n. \end{cases}$$

Пусть $m \neq k$. Тогда получим

$$t_k(x_m) = \frac{S_n(x_k)}{2\sin\frac{x_m-x_k}{2}S_n'(x_k)} = 0,$$

так как $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ – нули функции $S_n(x)$.

Пусть теперь $m = k$. Тогда перейдем к пределу при $x \to x_k$.

$$t_k(x_k) = \lim_{x \to x_k} t_k(x) = \lim_{x \to x_k} \frac{S_n(x)}{2\sin\frac{x_m - x_k}{2} S'_n(x_k)} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot S'_n(x_k)} \lim_{x \to x_k} \frac{S_n(x)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}.$$

Под знаком предела есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$t_k(x_k) = \frac{1}{2 \cdot S'_n(x_k)} \lim_{x \to x_k} \frac{S_n(x)}{\sin\frac{x - x_k}{2}} = \frac{1}{2 \cdot S'_n(x_k)} \lim_{x \to x_k} \frac{S'_n(x)}{\frac{1}{2}\cos\frac{x - x_k}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot S'_n(x_k)} \cdot \frac{2 \cdot S'_n(x_k)}{\cos\frac{x_k - x_k}{2}} = 1.$$

2. Покажем, что $r_n(x)$ является тригонометрической рациональной функцией порядка не выше n вида (1.7).

Заметим, что в соответствии с леммой 1.1

$$S_n(x) = \frac{q_{n+\frac{1}{2}}(x)}{w_n(x)},$$

где $q_{n+\frac{1}{2}}(x)$ – некоторый тригонометрический полином порядка $n + \frac{1}{2}$, причем

$$q_{n+\frac{1}{2}}(x) = A \prod_{m=0}^{2n} \sin\frac{x - x_m}{2}, \tag{1.8}$$

где A – некоторая константа [1, с.18].

Тогда получим

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_n t_k(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_n \frac{S_n(x)}{2\sin\frac{x - x_k}{2} S'_n(x_k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} y_n \frac{q_{n+\frac{1}{2}}(x)}{2\sin\frac{x - x_k}{2} S'_n(x_k) w_n(x)}.$$

Воспользуемся представлением (1.8) и получим

$$\frac{q_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sin\frac{x - x_k}{2}} = A \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{2n} \sin\frac{x - x_m}{2},$$

причем произведение справа является тригонометрическим полиномом порядка n. Следовательно,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} C \frac{q_n(x)}{w_n(x)},$$

где $C = \frac{Ay_n}{2S'_n(x_k)}$, $q_n(x)$ – некоторый тригонометрический полином порядка не выше n и является тригонометрической рациональной функцией указанного вида.

Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Интерполяционная рациональная тригонометрическая функция $L_n(x)$ (1.6) является точной для функции $f(x) = 1$, а также для всякой тригонометрической рациональной функции вида:

$$f(x) = \frac{q_n(x)}{w_n(x)}, \tag{1.9}$$

где $q_n(x)$ – некоторый тригонометрический полином порядка не выше n.

Доказательство.

1. Покажем, что интерполяционная рациональная тригонометрическая функция $L_n(x)$ (1.5) является точной для функции $f(x) = 1$, то есть, что она удовлетворяет условию

$$L_n(x, f) = L_n(x, 1) = 1.$$

Пусть $f(x) = 1$. Тогда

$$L_n(x, f) = L_n(x, 1) = \sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x) = \sum_{k=0}^{2n} t_k(x), \tag{1.10}$$

где $t_k(x) = \frac{q_n^{(1)}(x)}{w_n(x)}$, $q_n^{(1)}(x)$ – произвольный тригонометрический полином порядка не выше n.

Поэтому (2.1.10) примет вид:

$$L_n(x,1)=\sum_{k=0}^{2n}t_k(x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{q_n^{(1)}(x)}{w_n(x)}=\frac{q_n^{(2)}(x)}{w_n(x)}, \qquad (1.11)$$

где $q_n^{(2)}(x)-$ некоторый тригонометрический полином порядка не выше n. Исходя из теоремы 1.1 будем иметь

$$L_n(x_k,1)=\frac{q_n^{(2)}(x_k)}{w_n(x_k)}=1, k=0,1,\dots,2n.$$

Следовательно, тригонометрический полином порядка не выше n $q_n^{(2)}(x)-w_n(x)$ имеет $2n+1$ различный нуль. В соответствии с теоремой о нулях тригонометрических полиномов он может иметь не более $2n$ нулей. Таким образом, $q_n^{(2)}(x)\equiv w_n(x)$ и $L_n(x,1)\equiv 1$.

2. Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

Доказано. ■

2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ЭРМИТА-ФЕЙЕРА

Пусть заданы произвольные числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C},|\alpha_k|<1,k=1,2,\dots,n.$ Рассмотрим функцию

$$\lambda_n(u)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}, \qquad (2.1)$$

$$\theta_k=arg\alpha_k, k=1,2,\dots,n.$$

Лемма 2.1. Функция

$$S_n(x)=\sin\frac{1}{2}\int_0^x\lambda_n(u)du,$$

имеет на полуинтервале $[0,2\pi)$ n нулей.

Лемма 2.1 доказывается аналогично лемме 1.2.

Введем в рассмотрение функции:

$$t_k(x)=\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x\lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2, \qquad (2.2)$$

$$h_k(x)=t_k(x)\sin(x-x_k),\ k=1,2,\dots,n. \qquad (2.3)$$

Заметим, что в соответствии с (2.1)

$$\lambda_n(x)=\frac{q_n(x)}{w_n(x)}, \qquad (2.4)$$

где $q_n(x)$ – тригонометрический полином порядка n, не имеющий действительных корней.

Лемма 2.2. Функция $t_k(x)$ является рациональной тригонометрической дробью вида

$$t_k(x)=\frac{q_{n-1}^{(1)}(x)}{w_n(x)},$$

где $q_{n-1}(x)$ — некоторый тригонометрический полином порядка $n-1$.

Причем

$$t_k(x_i)=\begin{cases}0, i\neq k,\\1, i=k;\end{cases}$$

$$t_k'(x_i)=0, i=1,2,\dots,n.$$

Доказательство.

1. Действительно, пользуясь формулой

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},$$

получим

$$\sin^2\frac{1}{2}\int_0^x\lambda_n(u)du=\frac{1}{2}\left(1+\cos\int_0^x\lambda_n(u)du\right).$$

Поступая аналогично, как в доказательстве леммы 1.1, нетрудно показать, что функция $\cos\int_0^x\lambda_n(u)du$ является тригонометрической рациональной функцией вида

$$\frac{q_n^{(2)}(x)}{w_n(x)},$$

где $q_n^{(2)}(x) \in \mathbb{T}_n, \mathbb{T}_n$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n. Причем очевидно, что точки $x_k, k = 1,2,\dots,n$ являются простыми нулями числителя. Так как они являются и нулями тригонометрического полинома $\sin^2\frac{x-x_k}{2}$, то функция

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2$$

является тригонометрической рациональной функцией вида

$$\frac{q_{n-1}^{(3)}(x)}{w_n(x)},$$

где $q_{n-1}^{(3)}(x) \in \mathbb{T}_{n-1}$.

Тогда

$$t_k(x) = \frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 = \frac{w_n(x)}{q_n(x)}\cdot\frac{q_{n-1}^{(3)}(x)}{w_n(x)} = \frac{q_{n-1}^{(3)}(x)}{q_n(x)}.$$

Первое утверждение леммы доказано.

2. Докажем, что функция $t_k(x)$ обладает следующими свойствами:

$$t_k(x_i) = \begin{cases} 0, i \neq k, \\ 1, i = k; \end{cases}$$

$$t_k'(x_i) = 0, i = 1,2,\dots,n.$$

Пусть $i \neq k$. Тогда получим

$$t_k(x_i) = \frac{1}{\lambda_n(x_i)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^{x_i} \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x_i-x_k}{2}}\right)^2 = 0,$$

так как $x_1, x_2, \dots, x_n$ – нули $S_n(\mathrm{x}) = \sin\frac{1}{2}\int_0^{x_i}\lambda_n(u)du$.

Пусть теперь $i = k$. Тогда перейдем к пределу и получим:

$$\lim_{x\to x_k} t_k(x_k) = \lim_{x\to x_k}\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2.$$

Разобьем предел произведения на произведение пределов:

$$\lim_{x\to x_k} t_k(x_k) = \lim_{x\to x_k}\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\cdot\lim_{x\to x_k}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2;$$

внесем знак предела в скобки, используем правило Лопиталя и получим:

$$\lim_{x\to x_k} t_k(x_k) = \lim_{x\to x_k}\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\cdot\left(\lim_{x\to x_k}\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to x_k}\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\cdot\left(\lim_{x\to x_k}\frac{\cos\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du\cdot\frac{1}{2}\lambda_n(x)}{\frac{1}{2}\cos\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{{\lambda_n}^2(x_k)}\cdot{\lambda_n}^2(x) = 1.$$

Что и требовалось показать.

Найдем производную функции $t_k(x)$.

$$t_k'(x) = -\frac{\lambda_n'(x)}{\lambda_n^2(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\times \tag{2.5}$$

$$\times\left(\frac{2S_n(x)\cdot\cos\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du\cdot\frac{1}{2}\lambda_n(x)\left(\sin\frac{x-x_k}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x-x_k}{2}\right)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\sin\frac{x-x_k}{2}\cdot\frac{1}{2}cos\frac{x-x_k}{2}\cdot\left(\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du\right)^2}{\left(\sin\frac{x-x_k}{2}\right)^4}\right).$$

Упростим выражение (2.5), приведя подобные, и введем обозначение $C_n(x) = \cos\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du$. Получим

$$t'_k(x) = -\frac{\lambda'_n(x)}{\lambda_n^2(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{S_n(x)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)} \times$$
$$\times \frac{S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2} - cos\frac{x-x_k}{2}\left(S_n(x)\right)^2}{\left(\sin\frac{x-x_k}{2}\right)^3}. \quad (2.6)$$

Пусть $i \neq k$. Тогда получим

$$t'_k(x_i) == -\frac{\lambda'_n(x_i)}{\lambda_n^2(x_i)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{S_n(x_i)}{\sin\frac{x_i-x_k}{2}}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_n(x_i)\lambda_n(x_k)} \times$$
$$\times \frac{S_n(x_i)C_n(x_i)\lambda_n(x_i)\sin\frac{x_i-x_k}{2} - cos\frac{x_i-x_k}{2}\left(S_n(x_i)\right)^2}{\left(\sin\frac{x_i-x_k}{2}\right)^3} = 0,$$

так как $x_1, x_2, \dots, x_n -$ нули $S_n(\mathrm{x}) = \sin\frac{1}{2}\int_0^{x_i} \lambda_n(u)du$.

Пусть теперь $i = k$. Тогда перейдем к пределу и получим:

$$\lim_{x\to x_k} t'_k(x_k) = -\frac{\lambda'_n(x_k)}{\lambda_n^2(x_k)\lambda_n(x_k)}\lim_{x\to x_k}\left(\frac{S_n(x)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_n(x_k)\lambda_n(x_k)} \times$$
$$\times \lim_{x\to x_k} \frac{S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2} - cos\frac{x-x_k}{2}\left(S_n(x)\right)^2}{\left(\sin\frac{x-x_k}{2}\right)^3}. \quad (2.7)$$

Вычислим каждый из пределов.

Для вычисления первого предела поднесем знак предела в скобки и воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_k}\left(\frac{S_n(x)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 = \left(\lim_{x\to x_k}\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 =$$
$$= \left(\lim_{x\to x_k}\frac{\cos\frac{1}{2}\int_0^x \lambda_n(u)du \cdot \frac{1}{2}\lambda_n(x)}{\frac{1}{2}\cos\frac{x-x_k}{2}}\right)^2 = \lambda_n^2(x_k). \quad (2.8)$$

Для вычисления второго предела трижды воспользуемся правилом Лопиталя. Для удобства введем следующие обозначения:

$$l_1(x) = S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2};$$
$$l_2(x) = cos\frac{x-x_k}{2}\left(S_n(x)\right)^2;$$
$$l_1(x) = \left(\sin\frac{x-x_k}{2}\right)^3.$$

Вычислим первую производную для функции $l_1(x)$:

$$l_1^{(1)}(x) = \frac{1}{2}C_n^2(x)\lambda_n^2(x)\sin\frac{x-x_k}{2} - \frac{1}{2}S_n^2(x)\lambda_n^2(x)\sin\frac{x-x_k}{2} +$$
$$+S_n(x)C_n(x)\lambda'_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2} + \frac{1}{2}S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\,cos\frac{x-x_k}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\lambda_n^2(x)\sin\frac{x-x_k}{2}\left[C_n^2(x) - S_n^2(x)\right] +$$
$$+S_n(x)C_n(x)\left[\lambda'_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2} + \frac{1}{2}\lambda_n(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}\right].$$

Вычислим вторую производную для функции $l_1(x)$:

$$l_1^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\lambda_n(x)\lambda'_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2}\left[C_n^2(x) - S_n^2(x)\right] + \frac{1}{4}\lambda_n^2(x)\cos\frac{x-x_k}{2} \times$$
$$\times \left[C_n^2(x) - S_n^2(x)\right] + \frac{1}{2}\lambda_n^2(x)\sin\frac{x-x_k}{2}\left(-2S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}C_n^2(x)\lambda_n(x)\left[\lambda'_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2} + \frac{1}{2}\lambda_n(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}S_n^2(x)\lambda_n(x)\left[\lambda_n'(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+\frac{1}{2}\lambda_n(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}\right]+$$
$$+S_n(x)C_n(x)\left[\lambda_n''(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+\frac{1}{2}\lambda_n'(x)\cos\frac{x-x_k}{2}+\frac{1}{2}\lambda_n'(x)\cos\frac{x-x_k}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\lambda_n(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}\right].$$

Приведем подобные и окончательно получим:

$$l_1^{(2)}(x)=[C_n^2(x)-S_n^2(x)]\left(\frac{3}{2}\lambda_n(x)\lambda_n'(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+\frac{1}{2}\lambda_n^2(x)\cos\frac{x-x_k}{2}\right)-$$
$$-S_n(x)C_n(x)\lambda_n^3(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+S_n(x)C_n(x)\left[\lambda_n''(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+\right.$$
$$\left.+\lambda_n'(x)\cos\frac{x-x_k}{2}-\frac{1}{4}\lambda_n(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}\right].$$

Вычислим третью производную для функции $l_1(x)$, приведем подобные и получим:

$$l_1^{(3)}(x)=\frac{1}{2}\lambda_n^4(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}[S_n^2(x)-C_n^2(x)]-$$
$$-\frac{1}{2}S_n(x)C_n(x)\lambda_n^3(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}-$$
$$-3S_n(x)C_n(x)\lambda_n^2(x)\lambda_n'(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}-\frac{3}{2}\left(\lambda_n'(x)\right)^2 sin\frac{x-x_k}{2}\times$$
$$\times[C_n^2(x)-S_n^2(x)]-[C_n^2(x)-S_n^2(x)]\lambda_n(x)\lambda_n''(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+$$
$$+\frac{9}{4}[C_n^2(x)-S_n^2(x)]\lambda_n(x)\lambda_n'(x)\cos\frac{x-x_k}{2}+\frac{1}{8}[C_n^2(x)-S_n^2(x)]\times$$
$$\times\lambda_n^2(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+S_n(x)C_n(x)\left[\lambda_n'''(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\lambda_n''(x)\cos\frac{x-x_k}{2}-\frac{3}{4}\lambda_n'(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}-\frac{1}{8}\lambda_n(x)\cos\frac{x-x_k}{2}\right.$$

При $x\to x_k$ предел функции $l_1^{(3)}(x)$ будет равен:

$$\lim_{x\to x_k}l_1^{(3)}(x)=\frac{9}{4}\lambda_n(x_k)\lambda_n'(x_k). \tag{2.9}$$

Вычислим первую производную для функции $l_2(x)$:

$$l_2^{(1)}(x)=-\frac{1}{2}S_n^2(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+2\cdot\frac{1}{2}S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}S_n^2(x)\sin\frac{x-x_k}{2}+S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}.$$

Вычислим вторую производную для функции $l_2(x)$:

$$l_2^{(2)}(x)=-\frac{1}{2}\cdot 2S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}S_n^2(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}C_n^2(x)\lambda_n^2(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}-\frac{1}{2}S_n^2(x)\lambda_n^2(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}+$$
$$+S_n(x)C_n(x)\lambda_n'(x)\cos\frac{x-x_k}{2}-\frac{1}{2}S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}.$$

Приведем подобные и окончательно получим:

$$l_2^{(2)}(x)=\frac{1}{2}\lambda_n^2(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}[C_n^2(x)-S_n^2(x)]-S_n(x)C_n(x)\lambda_n(x)\sin\frac{x-x_k}{2}-$$
$$-\frac{1}{4}S_n^2(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}+S_n(x)C_n(x)\lambda_n'(x)\cos\frac{x-x_k}{2}.$$

Вычислим третью производную для функции $l_2(x)$, приведем подобные и получим:

$$l_2^{(3)}(x)=-\frac{3}{4}\lambda_n^2(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}[C_n^2(x)-S_n^2(x)]-\lambda_n^3(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}\times$$
$$\times S_n(x)C_n(x)+\frac{3}{2}\lambda_n(x)\lambda_n'(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}[C_n^2(x)-S_n^2(x)]+$$
$$+S_n(x)C_n(x)\,cos\frac{x-x_k}{2}\left[\lambda_n''(x)-\frac{3}{4}\lambda_n(x)\right]-\frac{3}{2}S_n(x)C_n(x)\times$$
$$\times\lambda_n'(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}+\frac{1}{8}S_n^2(x)\,sin\frac{x-x_k}{2}.$$

При $x\to x_k$ предел функции $l_2^{(3)}(x)$ будет равен:

$$\lim_{x\to x_k}l_2^{(3)}(x)=\frac{3}{2}\lambda_n(x_k)\lambda_n'(x_k). \tag{2.10}$$

Вычислим первую производную для функции $l_3(x)$:

$$l_3^{(1)}(x)=\frac{3}{2}\left(\sin\frac{x-x_k}{2}\right)^2 cos\frac{x-x_k}{2}=\frac{3}{4}\sin\frac{x-x_k}{2}\sin(x-x_k).$$

Вычислим вторую производную для функции $l_3(x)$:

$$l_3^{(2)}(x)=\frac{3}{4}cos\frac{x-x_k}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(x-x_k)+\frac{3}{4}\sin\frac{x-x_k}{2}\cos(x-x_k)=$$
$$=\frac{3}{8}cos\frac{x-x_k}{2}\sin(x-x_k)+\frac{3}{4}\sin\frac{x-x_k}{2}\cos(x-x_k).$$

Вычислим третью производную для функции $l_3(x)$:

$$l_3^{(3)}(x)=-\frac{3}{16}\sin\frac{x-x_k}{2}\sin(x-x_k)+\frac{3}{8}cos\frac{x-x_k}{2}\cos(x-x_k)+$$
$$+\frac{3}{8}cos\frac{x-x_k}{2}\cos(x-x_k)-\frac{3}{4}\sin\frac{x-x_k}{2}\sin(x-x_k)=$$
$$=-\frac{15}{16}\sin\frac{x-x_k}{2}\sin(x-x_k)+\frac{3}{4}cos\frac{x-x_k}{2}\cos(x-x_k).$$

При $x\to x_k$ предел функции $l_3^{(3)}(x)$ будет равен:

$$\lim_{x\to x_k} l_2^{(3)}(x)=\frac{3}{4}. \tag{2.11}$$

Подставим найденные пределы (2.8)-(2.11) в (2.7) и окончательно получим:

$$\lim_{x\to x_k} t_k'(x_k)=-\frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n^2(x_k)\lambda_n(x_k)}\cdot\lambda_n^2(x_k)+\frac{1}{\lambda_n(x_k)\lambda_n(x_k)}\times$$
$$\times\frac{\frac{9}{4}\lambda_n(x_k)\lambda_n'(x_k)-\frac{3}{2}\lambda_n(x_k)\lambda_n'(x_k)}{\frac{3}{4}}=-\frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n(x_k)}+\frac{1}{\lambda_n(x_k)\lambda_n(x_k)}\times$$
$$\times\frac{\frac{3}{4}\lambda_n(x_k)\lambda_n'(x_k)}{\frac{3}{4}}=-\frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n(x_k)}+\frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n(x_k)}=0.$$

Лемма 2.2 доказана полностью.

Лемма 2.3. Функция $h_k(x)$ (2.3) является тригонометрической рациональной функцией порядка n следующего вида

$$h_k(x)=\frac{q_n^{(4)}(x)}{w_n(x)},$$

где $q_n^{(4)}(x)$ - $\mathbb{T}_n$, и обладает следующими свойствами:

$$h_k(x_i)=0,\ i=1,2,\dots,n; \tag{2.12}$$
$$h_k'(x_i)=\begin{cases}0, i\neq k,\\ 1, i=k;\end{cases}\ i,k=1,2,\dots,n. \tag{2.13}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы непосредственно следует из леммы 2.2.

Докажем справедливость свойства (2.12).

Пусть $i\neq k$. Тогда получим

$$h_k(x_i)=t_k(x_i)\sin(x_i-x_k)=\frac{1}{\lambda_n(x_i)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^{x_i}\lambda_n(u)du}{\sin\frac{x_i-x_k}{2}}\right)^2\times$$
$$\times\sin(x_i-x_k)=0,$$

так как $x_1,x_2,\dots,x_n$ – нули $S_n(\mathrm{x})=\sin\frac{1}{2}\int_0^{x_i}\lambda_n(u)du$.

Пусть теперь $i=k$. Тогда перейдем к пределу и получим:

$$\lim_{x\to x_k} h_k(x_k)=\lim_{x\to x_k}(t_k(x)\cdot\sin(x-x_k)).$$

Разобьем предел произведения на произведение пределов:

$$\lim_{x\to x_k} h_k(x_k)=\lim_{x\to x_k}\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^{x}\lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to x_k}\sin(x-x_k).$$

Вычислим первый предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_k} t_k(x_k)=\lim_{x\to x_k}\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\cdot\left(\lim_{x\to x_k}\frac{\sin\frac{1}{2}\int_0^{x}\lambda_n(u)du}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right)^2=$$
$$=\lim_{x\to x_k}\frac{1}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\cdot\left(\lim_{x\to x_k}\frac{\cos\frac{1}{2}\int_0^{x}\lambda_n(u)du\cdot\frac{1}{2}\lambda_n(x)}{\frac{1}{2}\cos\frac{x-x_k}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n{}^2(x_k)}\cdot\lambda_n{}^2(x)=1.$$

Тогда окончательно получим

$$\lim_{x\to x_k}h_k(x_k)=1\cdot 0=0.$$

Докажем справедливость свойства (2.13). Для это найдем производную функции $h_k(x)$:

$$h'_k(x)=t'_k(x)\sin(x-x_k)+t_k(x)\cos(x-x_k).$$

Пусть $i\neq k$. Тогда, согласно лемме 2.2, получим

$$h'_k(x_i)=t'_k(x_i)\sin(x_i-x_k)+t_k(x_i)\cos(x_i-x_k)=0.$$

Пусть $i=k$. Используя результаты леммы 2.2, нетрудно показать, что

$$h'_k(x_k)=1.$$

Что и требовалось показать.■

Теорема 2.1. Функция

$$H_n(x,f)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\,t_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y_k\,h_k(x),\tag{2.14}$$

где f – некоторая функция, определенная на [-1;1], y_k, $k=1,2,\dots,n$ -заданные числа, является рациональной тригонометрической функцией порядка не выше n и удовлетворяет следующим условиям:

$$H_n(x_k,f)=f(x_k),H'_n(x_k)=y_k,\quad k=1,2,\dots,n.\tag{2.15}$$

Доказательство. Так как функции $t_k(x)$ и $h_k(x)$, $k=1,2,\dots,n$, являются тригонометрическими рациональными функциями порядка $n-1$ и n соответственно и имеют один и тот же знаменатель, то функция $H_n(x,f)$ является тригонометрической рациональной функцией порядка не выше n с тем же знаменателем, равным $q_n(x)$.

Покажем, что выполняется условие $H_n(x_i,f)=f(x_i),i=1,2,\dots,n$.

Действительно,

$$H_n(x_i,f)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)t_k(x_i)+\sum_{k=1}^{n}y_k\,h_k(x_i).$$

На основании леммы 2.2 и леммы 2.3 заключаем, что $h_k(x_i)=0,k=1,2,\dots,n$, $t_k(x_i)=0,k\neq i$, и $t_i(x_i)=1$. Следовательно,

$$H_n(x_i,f)=f(x_i),i=1,2,\dots,n.$$

Покажем, что выполняется условие $H'_n(x_k,f)=y_k,k=1,2,\dots,n$. Для этого найдем производную функции $H_n(x,f)$.

$$H'_n(x,f)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\,t'_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y_k\,h'_k(x).$$

Рассмотрим

$$H'_n(x_i,f)=\textstyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\,t'_k(x_i)+\sum_{k=1}^{n}y_k\,h'_k(x_i).$$

Также основываясь на леммах 2.2. и 2.3, заключаем, что

$$t'_k(x_i)=0,i=1,2,\dots,n,$$
$$h'_k(x_i)=0,k\neq i,$$
$$h'_i(x_i)=1.$$

Значит,

$$H'_n(x_i,f)=y_i,i=1,2,\dots,n.$$

Доказано.■

Заключение. Сделаем выводы.

1. Построены и изучены интерполяционные рациональные тригонометрические процессы Лагранжа и Эрмита-Фейера, а также их свойства.

2. Доказано, что данные процессы точны для функций $f(x)=1$ и $f(x)=\frac{q_n(x)}{w_n(x)}$, где $q_n(x)$ – некоторый тригонометрический полином порядка не выше n, $w_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1-2|\alpha_k|\cos(x-\theta_k)+|\alpha_k|^2)$.

Список литературы

1. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах: в 2 ч./ А. Х. Турецкий; Мн., «Высшая школа». – Минск,1968.-с.12-30,51-52.

2. Джрбашян М.М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям//Изв. АН. Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1956. – Т.9.№7. – с.3-28.