ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ РАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС ЭРМИТА-ФЕЙЕРА НА ОТРЕЗКЕ

К. В. Пищик

УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», факультет математики и информатики, специальность «Математика (научно-педагогическая деятельность)», кафедра фундаментальной и прикладной математики

Научный руководитель – Е. А. Ровба, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы.

Резюме

Пищик К.В. Интерполяционный процесс Эрмита-Фейера на отрезке.

Целью работы является построение интерполяционных рациональных функций Эрмита-Фейера с узлами Чебышева-Маркова первого рода.

Во введении представлены основные исторические сведения о возникновении и развитии теории интерполирования.

В основной части рассматривается интерполяционный процесс Фейера с узлами Чебышева. Построены интерполяционные рациональные функции Эрмита-Фейера с узлами Чебышева-Маркова первого рода, доказана их равномерная сходимость для функции $f(x) \in C[-1,1]$.

В заключении изложены результаты, которые были получены в ходе выполнения данной работы.

Ключевые слова: рациональная функция, интерполяционный процесс, полином, последовательность, узлы Чебышева.

Введение

Развитие теории интерполирования проходит на протяжении долгого времени и свою актуальность имеет по сей день, в особенности, в таких направлениях, как вычислительная математика и математический анализ. По ряду изучаемых проблемных вопросов теория интерполирования тесно связана с теорией приближения функций. Основными вопросами, которые изучает теория интерполирования, являются вопросы о поточечной и равномерной сходимости интерполяционного процессов Лагранжа.

Впервые выражение «интерполирование по Лагранжу» ввел Огюстен Луи Коши [1]. Он в своей работе «Курс анализа» утверждал, что первым, кто поставил и решил задачу о построении многочлена степени n, если учесть, что многочлен в точке $(n+1)$ отрезка может принимать любые наперед заданные значения, был Жозеф Луи Лагранж. Название формулы Лагранжа берет свое начало в 1795 году, когда Лагранж читал курс лекций в Нормальной школе, во время которых и была показана данная формула. Известно, что в 1779 году данную формулу привел Э. Варинг. Также в теории интерполирования возникли в 1670 году интерполяционная формула Дж. Григори, в 1687 и 1711 годы шесть формул И. Ньютона, которые применяются как для равностоящих, так и для неравностоящих узлов. Но, как оказалось, только Ж. Л. Лагранж ставит в приоритет проблему интерполирования. Таким образом, в ходе своей работы Ж. Л. Лагранж получил формулы, с помощью которых можно строить тригонометрический полином, который принимает любые наперед заданные значения в равностоящих узлах. Все это дала свою основу определению «интерполирование по Лагранжу».

Продолжением в развитии теории интерполирования стали работы ученых Леонарда Эйлера, Пафнутия Львовича Чебышева, Андрея Андреевича Маркова. Их работы были связаны с необходимостью выяснить, насколько хороши многочлены Лагранжа для приближения интерполирования функции в равномерной метрике. Ж. Л. Лагранж выдвинул гипотезу о том, что при неограниченном росте узлов интерполяционный процесс должен сходиться для любой непрерывной функции. Данную гипотезу все считали верной, пока в 1884 году К. Мере, Э. Борель и в 1901 году К. Рунге выявили, что она ошибочна.

Важным моментом в развитии теории интерполирования стала работа Г. Фабера, в которой шла речь о том, что равномерную сходимость на отрезке интерполяционного процесса Лагранжа для любой непрерывной функции нельзя обеспечить никаким набором узлов [1, с.7]. Позже важным открытием в теории интерполирования стали работы С. Н. Бернштейна и Й. Марцинкевича [2, с.455]. Результат Й. Марцинкевича, который был получен в 1937 году говорил о том, что для всякой непрерывной на отрезке функции существует такая матрица узлов, при которой соответствующая последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа равномерно сходится к функции [3, с.7]. Таким образом, данные работы показали, что сходимость процессов Лагранжа зависит не только от свойств самой интерполируемой функции, но и от свойств матрицы узлов. Именно по этой причине возникли трудности в изучении сходимости интерполяционных процессов для данного класса функций или матриц. Этой теме посвящено множество опубликованных книг, но среди огромного числа учебников можно выделить только некоторые (книги В. Л. Гончарова [3], И. П. Натансона [2], А. Зигмунда [3]), в которых теория интерполирования для данного времени раскрыта довольно детально.

Таким образом возникла задача построения таких интерполяционных процессов, которые сходились бы для всякой непрерывной функции. Наиболее известным процессом в этом направлении является процесс интерполяционный процесс Эрмита-Фейера [2, с. 549]. Коротко приведем основные его положения.

Благодаря работам Л. Фейера были получены некоторые положительные результаты для интерполирования с кратными узлами, то есть для процессов Эрмита. Сейчас приведем один из простейших результатов по этой теме.

Теорема [2, с.549] Пусть

$$x_k = x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \ (k = 1,2,\dots,n)$$

суть узлы Чебышева, а $f(x)$ – непрерывная функция, заданная на $[-1,1]$. Если $H_{2n-1}(x)$ есть полином степени не выше $2n-1$, удовлетворяющий условиям

$$H_{2n-1}(x_k) = f(x_k), H'_{2n-1}(x_k) = 0, \quad (1)$$

то равномерно на $[-1,1]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} H_{2n-1}(x) = f(x) \quad (2)$$

Для того, чтобы решить задачу, в которой рассматривается полином $H(x)$, необходимо найти формулы, которые будут выражать коэффициенты данного полинома через условия задачи. Тогда такие формулы имеют вид:

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x), \quad (3)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_k(x) &= \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right] l_k^2(x), \\ B_k(x) &= (x - x_k) l_k^2(x) \end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Так как в качестве узлов взяты узлы Чебышева, то справедливо следующее равенство

$$\omega(x) = T_n(x) = \cos(narccosx).$$

Тогда для узлов Чебышева общие формулы (3) и (4) будут иметь следующий вид

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k B_k^{(n)}(x), \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} A_k^{(n)}(x) &= \left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2 (1 - x x_k), \\ B_k^{(n)}(x) &= \left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2 (1 - x_k^2)(x - x_k); \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Исходя из теоремы полином $H_{2n-1}(x)$, который удовлетворяет условиям (1) и с учетом (5) будет иметь вид

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) A_k^{(n)}(x). \quad (7)$$

Основная часть

В нашей работе будет построен интерполяционный рациональный процесс Эрмита-Фейера с узлами Чебышева-Маркова первого рода.

Пусть числа $a_k, k = 1,2,\dots,n$ являются действительными и $a_k \in (-1,1)$, либо комплексно сопряженными, $a_1 = 0$. Введем рациональную дробь Чебышева-Маркова, см [5, с.49],

$$m_n(x) = cos\mu_n(x), \quad (8)$$

где

$$\mu_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \arccos\frac{x + a_k}{1 + a_k x}, x \in [-1,1].$$

Найдем производную от $\mu_n(x)$:

$$\mu'_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x + a_k}{1 + a_k x}\right)^2}} \left(\frac{x + a_k}{1 + a_k x}\right)' =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k^2}{(1 + a_k x)\sqrt{(1 - a_k^2)(1 - x^2)}} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1-a_k^2}{(1+a_k x)\sqrt{(1-a_k^2)(1-x^2)}} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{(1+a_k x)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$$

Обозначим

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}, \tag{9}$$

тогда

$$\mu'_n(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Косинус-дробь $m_n(x)$ может быть представлена в виде [5, с. 47],

$$m_n(x) = \frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{2n}(1+a_k x)}, \tag{10}$$

где $p_n(x)$ – некоторый алгебраический полином степени n . Рациональная функция $m_n(x)$ имеет n простых нулей на интервале $(-1,1)$:

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < 1.$$

Пусть функция f определена на отрезке [-1, 1]. Рассмотрим следующую функцию:

$$H_{2n-1}(x,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) A_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y_k B_k(x),\ x \in [-1,1] \tag{11}$$

где $y_k, k = 1,2,\dots,n$ – произвольные действительные числа,

$$A_k(x) = \frac{1 - x x_k}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)} \left(\frac{m_n(x)}{x - x_k}\right)^2, \tag{12}$$

$$B_k(x) = \frac{1 - x_k^2}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)} \frac{m_n^2(x)}{x - x_k}, k = 1,2,\dots,n. \tag{13}$$

Представим функцию $\lambda_n(x)$ в виде

$$\lambda_n(x) = \frac{q_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \tag{14}$$

где $q_{n-1}(x)$ – некоторый полином степени не выше $n-1$, не имеющий корней на отрезке [-1, 1].

Лемма 1. Функция $H_{2n-1}(x,f)$ является рациональной порядка не выше $2n-1$ и имеет вид

$$H_{2n-1}(x,f) = \frac{p_{2n-1}(x)}{q_{n-1}(x)\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)},$$

где $p_{2n-1}(x)$ есть некоторый алгебраический полином степени не выше $2n-1$.

Действительно, из формул (12), (14) и (10) следует, что

$$A_k(x) = \frac{(1 - x x_k)\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}{q_{n-1}(x)\lambda_n(x_k)} \frac{p_{n-1}^2(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)^2} =$$

$$= \frac{p_{2n-1}^{(1)}(x)}{q_{n-1}(x)\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \tag{15}$$

где $p_{n-1}(x), p_{2n-1}^{(1)}(x)$ – некоторые алгебраические полиномы степени не выше $n-1$ и $2n-1$ соответственно.

Аналогично, из формул (13), (14) и (10) получим, что

$$B_k(x) = \frac{p_{2n-1}^{(2)}(x)}{q_{n-1}(x)\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)} \tag{16}$$

где $p_{2n-1}^{(2)}(x)$ – некоторый алгебраический полином степени не выше $2n-1$.

Тогда из полученных равенств (15) и (16) на основании определения функции $H_{2n-1}(x,f)$, следует справедливость утверждения леммы 1.

Лемма 2. Справедливы равенства

$$H_{2n-1}(x_k,f) = f(x_k), \qquad H'_{2n-1}(x_k,f) = y_k, k = 1,2,\dots,n. \tag{17}$$

Доказательство:

а) Покажем, что

$$A_k(x_m) = \begin{cases} 1, m = k \\ 0, m \neq k \end{cases} \text{ и } A'_k(x_m) = 0, \forall m, k = 1,2,\dots,n$$

Пусть $m \neq k$, тогда формула (12) примет вид:

$$A_k(x_m) = \frac{1 - x_m x_k}{\lambda_n(x_m)\lambda_n(x_k)} \left(\frac{m_n(x_m)}{x_m - x_k}\right)^2 = 0\,.$$

Пусть $m = k$, тогда

$$A_k(x_k) = \lim_{x\to x_k} A_k(x) = \lim_{x\to x_k} \frac{1 - x x_k}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)} \left(\frac{m_n(x)}{x - x_k}\right)^2 =$$

$$= \frac{1 - x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)} \lim_{x\to x_k} \left(\frac{m_n(x)}{x - x_k}\right)^2 = \frac{1 - x^2}{\lambda_n^2(x_k)} \lim_{x\to x_k} \left(\frac{m_n'(x)}{1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1 - x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)} \left(\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1 - x_k^2}} sin\mu_n(x_k)\right)^2 = \left(sin\mu_n(x_k)\right)^2 = 1.$$

Найдем производную $A_k(x_k)$:

$$A_k'(x) = \left(\frac{1 - x x_k}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)} \left(\frac{m_n(x)}{x - x_k}\right)^2\right)' = -\frac{x_k m_n^2(x)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^2} +$$

$$+ \frac{2(1 - x x_k) m_n(x) m_n{}'(x)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^2} - \frac{(1 - x x_k) m_n^2(x) \lambda_n'(x)}{\lambda_n^2(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^2} - \frac{2(1 - x x_k) m_n^2(x)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^3}$$

Проверим выполнения условий $A_k'(x_m) = 0, \forall m, k = 1,2, \dots, n$.

Пусть $m \neq k$, имеем

$$A_k'(x_m) = -\frac{x_k m_n^2(x_m)}{\lambda_n(x_m)\lambda_n(x_k)(x_m - x_k)^2} +$$

$$+ \frac{2(1 - x_m x_k) m_n(x_m) m_n'(x_m)}{\lambda_n(x_m)\lambda_n(x_k)(x_m - x_k)^2} - \frac{(1 - x_m x_k) m_n^2(x_m) \lambda_n'(x_m)}{\lambda_n^2(x_m)\lambda_n(x_k)(x_m - x_k)^2} -$$

$$- \frac{2(1 - x_m x_k) m_n^2(x_m)}{\lambda_n(x_m)\lambda_n(x_k)(x_m - x_k)^3} = 0.$$

При $m = k$, получаем

$$A_k'(x_k) = \lim_{x\to x_k} A_k'(x) = \lim_{x\to x_k} \left(-\frac{x_k m_n^2(x)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^2}\right) +$$

$$+ \lim_{x\to x_k} \frac{2(1 - x x_k) m_n(x) m_n'(x)(x - x_k) - 2(1 - x x_k) m_n^2(x)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^3} -$$

$$- \lim_{x\to x_k} \frac{(1 - x x_k) m_n^2(x) \lambda_n'(x)}{\lambda_n^2(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^2}$$

Вынесем за знак предела то, что не зависит от x:

$$A_k'(x_k) = -\frac{x_k}{\lambda_n^2(x_k)} \lim_{x\to x_k} \left(\frac{m_n(x)}{x - x_k}\right)^2 -$$

$$- \frac{(1 - x_k^2)\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n^3(x_k)} \lim_{x\to x_k} \left(\frac{m_n(x)}{x - x_k}\right)^2 +$$

$$+ \lim_{x\to x_k} \frac{2(1 - x x_k)\left((x - x_k) m_n'(x) m_n(x) - m_n^2(x)\right)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x - x_k)^3}$$

Воспользовавшись правилом Лопиталя, имеем:

$$A_k'(x_k) = -\frac{x_k}{\lambda_n^2(x_k)} \left(\frac{\lambda_n(x_k)}{\sqrt{1 - x_k^2}} sin\mu_n(x_k)\right)^2 -$$

$$- \frac{(1 - x_k^2)\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n^3(x_k)} \left(\frac{\lambda_n(x_k)}{\sqrt{1 - x_k^2}} sin\mu_n(x_k)\right)^2 +$$

$$+ \frac{2(1 - x_k^2)}{\lambda_n^2(x_k)} \lim_{x\to x_k} \frac{m_n(x)}{x - x_k} \lim_{x\to x_k} \frac{(x - x_k) m_n'(x) - m_n(x)}{(x - x_k)^2}$$

Сделав некоторые несложные преобразования, получим:

$$A_k'(x_k) = \left(-\frac{x_k}{1 - x_k^2} - \frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n(x_k)}\right) \sin^2 \mu_n(x_k) + \frac{2(1 - x_k^2)}{\lambda_n^2(x_k)} \lim_{x\to x_k} \frac{m_n'(x)}{1} \times$$

$$\times \lim_{x\to x_k} \frac{m_n'(x) + (x - x_k) m_n''(x) - m_n'(x)}{2(x - x_k)}$$

Воспользуемся правилом Лопиталя во второй раз и, приведя подобные, имеем:

$$A_k'(x_k) = \left(-\frac{x_k}{1 - x_k^2} - \frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n(x_k)}\right) \sin^2 \mu_n(x_k) + \frac{(1 - x_k^2) m_n{}'(x_k) m_n''(x_k)}{\lambda_n^2(x_k)} \tag{18}$$

Заметим, что

$$m_n'(x_k) = sin\mu_n(x_k)\left(-\frac{\lambda_n(x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}}\right)$$

И

$$m_n''(x_k) = \frac{\left(\lambda_n'(x_k)sin\mu_n(x_k) - \frac{\lambda_n^2(x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}}cos\mu_n(x_k)\right)\sqrt{1-x_k^2}}{1-x_k^2} + \\ + \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x_k^2}}sin\mu_n(x_k)}{1-x_k^2}$$

Подставим значения производных в (18) и преобразуем полученное выражение, найдем:

$$A_k'(x_k) = \frac{sin\mu_n(x_k)\left(\lambda_n'(x_k)sin\mu_n(x_k)\sqrt{1-x_k^2} - \lambda_n^2(x_k)cos\mu_n(x_k)\right)}{\sqrt{1-x_k^2}\lambda_n(x_k)} + \\ + \frac{sin\mu_n(x_k)\left(\frac{x_k}{\sqrt{1-x_k^2}}sin\mu_n(x_k)\right)}{\sqrt{1-x_k^2}\lambda_n(x_k)} - \\ -\left(\frac{x_k}{1-x_k^2} + \frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n(x_k)}\right)sin\mu_n(x_k) = \frac{1\cdot\lambda_n'(x_k)\cdot 1\cdot 1}{1\cdot\lambda_n(x_k)} - \frac{\lambda_n'(x_k)}{\lambda_n(x_k)}\cdot 1 = 0$$

б) Дальше докажем, что

$$B_k(x_m) = 0, \forall k, m = 1,2,\ldots,n.$$

Пусть $m \neq k$, тогда равенство (13) примет вид:

$$B_k(x_m) = \frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_m)\lambda_n(x_k)}\cdot\frac{m_n^2(x_m)}{x_m - x_k} = 0.$$

При $m = k$, получим

$$B_k(x_k) = \lim_{x\to x_k} B_k(x) = \lim_{x\to x_k}\frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\cdot\frac{m_n^2(x)}{x-x_k} = \\ = \frac{1-x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)}\lim_{x\to x_k}\frac{m_n^2(x)}{x-x_k} = \frac{1-x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)}\lim_{x\to x_k}\frac{2m_n(x)m_n'(x)}{1} = \\ = \frac{1-x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)}2m_n(x_k)m_n'(x_k) = 0.$$

Найдем производную функции $B_k(x)$,

$$B_k'(x) = \frac{2m_n(x)m_n'(x)(1-x_k^2)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x-x_k)} - \frac{\lambda_n'(x)(1-x_k^2)m_n^2(x)}{\lambda_n^2(x)\lambda_n(x_k)(x-x_k)} - \\ - \frac{(1-x_k^2)m_n^2(x)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x-x_k)^2}$$

Проверим выполнения условий

$$B_k'(x_m) = \begin{cases} 1, m = k \\ 0, m \neq k \end{cases}, m,k = 1,2,\ldots,n$$

Очевидно, что $B_k'(x_m) = 0, m \neq k$.
Теперь пусть $m = k$, тогда

$$B_k'(x_k) = \lim_{x\to x_k} B_k'(x) = \lim_{x\to x_k}\frac{2m_n(x)m_n'(x)(1-x_k^2)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x-x_k)} - \\ - \lim_{x\to x_k}\frac{\lambda_n'(x)(1-x_k^2)m_n^2(x)}{\lambda_n^2(x)\lambda_n(x_k)(x-x_k)} - \lim_{x\to x_k}\frac{(1-x_k^2)m_n^2(x)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)(x-x_k)^2}$$

Используя свойства пределов, имеем:

$$B_k'(x_k) = \lim_{x\to x_k}\frac{2m_n'(x)(1-x_k^2)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\cdot\lim_{x\to x_k}\frac{m_n(x)}{x-x_k} - \\ - \frac{\lambda_n'(x_k)(1-x_k^2)}{\lambda_n^3(x_k)}\lim_{x\to x_k}\frac{m_n^2(x)}{x-x_k} - \frac{1-x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)}\lim_{x\to x_k}\left(\frac{m_n(x)}{x-x_k}\right)^2$$

Воспользуемся правилом Лопиталя

$$B_k'(x_k) = \frac{2(1-x_k^2)}{\lambda_n^2(x_k)}\lim_{x\to x_k} m_n'(x)\lim_{x\to x_k}\frac{m_n'(x)}{1} -$$

$$-\frac{\lambda_n'(x_k)(1-x_k^2)}{\lambda_n^3(x_k)}\lim_{x\to x_k}\frac{2m_n(x)m_n'(x)}{1}-\frac{1-x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)}\left(\frac{\lambda_n(x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}}sin\mu_n(x_k)\right)^2.$$

Выполнив некоторые несложные преобразования и перейдя к x_k, имеем:

$$B_k'(x_k)=\frac{2(1-x_k^2)}{\lambda_n^2(x_k)}\left(\frac{\lambda_n(x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}}sin\mu_n(x_k)\right)^2-1=$$

$$=2\big(sin\mu_n(x_k)\big)^2-1=2-1=1.$$

Равенства (17) указывают, что построенная рациональная функция является функцией типа Эрмита-Фейера. В частности, если все $a_k=0, k=0,1,\dots,2n-1$, то $H_{2n-1}(x,f)$ является интерполяционным полиномом Эрмита- Фейера с узлами Чебышева, см [2, с.549].

Лемма 3. Рациональная функция $H_{2n-1}(x,f)$ является точной для всякой рациональной функции вида

$$r_{2n-1}(x)=\frac{p_{2n-1}^*(x)}{q_{n-1}(x)\prod_{k=1}^n(1+a_kx)},$$

где $p_{2n-1}^*(x)$ – произвольный полином степени не выше $2n-1$, при условии, что $y_k=r_{n-1}'(x_k), k=1,2,\dots,n$. В частности, если $y_k=0, k=1,2,\dots,n$, то

$$H_{2n-1}(x,1)\equiv 1. \tag{19}$$

Доказательство:

В определении (11) полагаем $y_k=r_{2n-1}'(x_k)$. Воспользуемся леммой 2. Будем иметь равенства

$$H_{2n-1}(x_k,r_{2n-1})=r_{2n-1}(x_k),$$

$$H_{2n-1}'(x_k,r_{2n-1})=r_{2n-1}'(x_k), k=1,2,\dots,n \tag{20}$$

Рассмотрим разность

$$H_{2n-1}(x,r_{2n-1})-r_{2n-1}(x).$$

Из леммы 1 следует, что эта разность является рациональной функцией порядка не выше $2n-1$ и на основании (20) имеет n корней второй кратности. Следовательно,

$$H_{2n-1}(x,r_{2n-1})\equiv r_{2n-1}(x).$$

Теперь равенство (19) становится очевидным. В дальнейшем будем полагать, что $y_1=y_2=\dots=y_n=0$, т.е.

$$H_{2n-1}(x)=\sum_{k=1}^n f(x_k)A_k(x). \tag{21}$$

В этом случае оператор

$$H_{2n-1}: C[-1,1]\to C[-1,1]$$

является линейным, положительным и точным для функции $f(x)=1$, см (19).

Теорема 1. Если числа $a_k, k=0,1,\dots, a_0=0$, такие, что ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-|c_k|), c_k=a_k^{-1}-\sqrt{a_k^{-2}-1}, |c_k|<1, k=0,1,\dots.$$

расходится, то для любой функции $f\in C[-1,1]$ соответствующая последовательность $\{H_{2n-1}(x,f)\}$ равномерно сходится к функции f на отрезке [-1,1].

Доказательству теоремы предпошлем.

Лемму 4. Справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{\lambda_n(x_k)}=1 \tag{22}$$

Доказательство. Из теоремы 4.2 [6, с.79], следует, что квадратурная формула

$$\int_{-1}^1\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\sum_{k=1}^n\frac{\pi}{\lambda_n(x_k)}f(x_k)$$

точна для функции $f(x)\equiv 1$. Следовательно,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{\lambda_n(x_k)}.$$

Остается вычислить интеграл слева,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

и получим формулу (19).

Сейчас докажем теорему.

Доказательство. Из равенств

$$H_{2n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)A_k(x)$$

и

$$H_{2n-1}(x,1)\equiv 1 \tag{23}$$

получим

$$|f(x)-H_{2n-1}(x)|\le\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x)|\,A_k(x),x\in[-1,1] \tag{24}$$

Так как функция $f\in C[-1,1]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна. Следовательно для произвольного $\varepsilon>0$ найдем такое $\delta>0$, чтобы

$$|x''-x'|<\delta=>|f(x'')-f(x')|<\varepsilon,\forall x',x''\in[-1;1].$$

Теперь фиксируем произвольные $x\in[-1,1]$ и разобьем множество чисел $1,2,\dots,n$ на 2 группы Ω и $\mathrm{C}\Omega$. К группе Ω отнесем те k, $k=1,2,\dots,n$, для которых выполняется неравенство

$$|x_k-x|<\delta.$$

К группе $\mathrm{C}\Omega$ отнесем оставшиеся k, для них будет выполнялся следующее неравенство

$$|x_k-x|\ge\delta.$$

Тогда

$$|f(x)-H_{2n-1}(x)|\le\sum_{k\in\Omega}|f(x_k)-f(x)|A_k(x)+\sum_{k\in\mathrm{C}\Omega}|f(x_k)-f(x)|A_k(x) \tag{25}$$

Рассмотрим случай, когда $k\in\Omega$. Тогда

$$\sum_{k\in\Omega}|f(x_k)-f(x)|A_k(x)\le\varepsilon\sum_{k\in\Omega}A_k(x).$$

Исходя из равенства (12) замечаем, что $A_k(x)\ge 0,x\in[-1,1],k=1,2,\dots,n$. Следовательно, и так как

$$\sum_{k\in\Omega}A_k(x)\le\sum_{k=1}^{n}A_k(x)=1.$$

Последнее равенство имеет место на основании равенства (20), поэтому

$$\sum_{k\in\Omega}|f(x_k)-f(x)|A_k(x)\le\ \varepsilon\sum_{k\in\Omega}A_k(x)\le\varepsilon. \tag{26}$$

Рассмотрим случай, когда $k\in\mathrm{C}\Omega$. Так как

$$A_k(x)=\frac{1-xx_k}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{m_n(x)}{x-x_k}\right)^2,$$

и

$$|m_n(x)|=|\cos\mu_n(x)|\le 1,x\in[-1,1],$$
$$0<1-xx_k<2,x\in[-1,1],k=1,2,\dots,n,$$

то

$$A_k(x)\le\frac{2}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\frac{1}{\delta^2}\le\frac{2}{\delta^2\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}.$$

следовательно,

$$\sum_{k\in\mathrm{C}\Omega}A_k(x)\le\sum_{k\in\mathrm{C}\Omega}\frac{2}{\delta^2\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}=\frac{2}{\delta^2\lambda_n(x)}\sum_{k\in\mathrm{C}\Omega}\frac{1}{\lambda_n(x_k)}$$

Воспользовавшись леммой 4, получим

$$\sum_{k\epsilon\complement\Omega} A_k(x) \le \frac{2}{\delta^2\lambda_n(x)} \qquad (27)$$

Подставляя (23) и (24) в (22), имеем

$$|f(x) - H_{2n-1}(x)| \le \varepsilon + \frac{2}{\delta^2\lambda_n(x)}.$$

Теперь займемся оценкой снизу $\lambda_n(x),\ x\epsilon[-1,1]$,

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}.$$

Рассмотрим

$$b_k = \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x} = \frac{\sqrt{a_k^{-2}-1}}{a_k^{-1}+x}.$$

Теперь сделаем замену

$$a_k^{-1} = \frac{1}{2}(c_k + c_k^{-1}),$$

см. условие теоремы 1. Будем иметь

$$b_k = \frac{1-c_k^2}{2c_k\left(\frac{1}{2}(c_k+c_k^{-1})+x\right)} = \frac{1-c_k^2}{1+2c_k x + c_k^2}.$$

Предположим, что $c_k \in (-1,1)$. Тогда

$$b_k \ge \frac{1-c_k^2}{1+2|c_k|+c_k^2} \ge \frac{1-|c_k|}{1+|c_k|} > \frac{1}{2}(1-|c_k|).$$

Если же c_k – комплексное число, то рассмотрим сумму

$$b_k + \overline{b_k} = \frac{1-c_k^2}{1+2c_k x + c_k^2} + \frac{1-\bar{c}_k^{\,2}}{1+2\bar{c}_k x + \bar{c}_k^{\,2}}.$$

Преобразуем ее

$$b_k + \overline{b_k} = \frac{(1-c_k^2)(1+2\bar{c}_k x+\bar{c}_k^{\,2}) + (1-\bar{c}_k^{\,2})(1+2c_k x + c_k^2)}{(1+2\bar{c}_k x+\bar{c}_k^{\,2})(1+2c_k x+c_k^2)} =$$

$$= \frac{2(1-|c_k|)(1+2|c_k|x cos\varphi_k + |c_k|^2)}{4|c_k|x cos\varphi_k(1+|c_k|^2) + |c_k|^2(2cos2\varphi_k + 4x^2 + |c_k|^2)+1}$$

Рассмотрим знаменатель

$$4|c_k|x cos\varphi_k(1+|c_k|^2) + |c_k|^2(2cos2\varphi_k + 4x^2 + |c_k|^2)+1 =$$

$$= 4|c_k|x cos\varphi_k + 4|c_k|^3 x cos\varphi_k + 2|c_k|^2 cos2\varphi_k + 4|c_k|^2x^2 + |c_k|^4 + 1.$$

Воспользовавшись формулой сокращенного умножения и сделав некоторые несложные преобразования, имеем

$$(1+2|c_k|x cos\varphi_k + |c_k|^2)^2 + 4|c_k|^2(x-1)(1-\cos^2\varphi_k).$$

Так как $x \le 1$, получаем

$$(1+2|c_k|x cos\varphi_k + |c_k|^2)^2 + 4|c_k|^2(x-1)(1-\cos^2\varphi_k) \le (1+2|c_k|x cos\varphi_k + |c_k|^2)^2.$$

Тогда

$$b_k + \overline{b_k} = \frac{2(1-|c_k|)(1+2|c_k|x cos\varphi_k + |c_k|^2)}{(1+2|c_k|x cos\varphi_k + |c_k|^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1-|c_k|)}{1+2|c_k|x cos\varphi_k + |c_k|^2} \ge \frac{2(1-|c_k|)}{1+2|c_k|+|c_k|^2}.$$

Таким образом, получили

$$b_k + \overline{b_k} \ge \frac{2(1-|c_k|)}{(1+|c_k|)^2} = (1-|c_k|).$$

Суммируя полученные неравенства найдем, что

$$\lambda_n(x) > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-|c_k|),\ x \in [-1,1].$$

Так как по условию

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-|c_k|) = \infty,$$

то существует номер $n_0\epsilon\mathbb{N}$ такой, что

$$\frac{2}{\delta^2\lambda_k(x)} < \varepsilon, x\epsilon[-1,1].$$

Таким образом,

$$|f(x) - H_{2n-1}(x,f)| < 2\varepsilon, x\epsilon[-1,1], n > n_0.$$

Теорема 1 доказана.

Заключение

Таким образом в данной работе доказано, что рациональная функция $H_{2n-1}(x,f)$ обладает свойствами, схожими со свойствами интерполяционного полинома Эрмита-Фейера с узлами Чебышева.

Список литературы

1.Привалов А. А. Теория интерполирования функций / А. А. Привалов. Саратов. Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Кн. 1 – 230с.

2.Натансон И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688с.

3. В. Л. Гончаров, Об интерполировании функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1937, том 1, выпуск 2, 171–184.

4.Зигмунд А. Тригонометрические ряды, том II / А.Зигмунд. — Москва: МИР, 1965 — 538 с.

5.Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. Минск. Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979. – 176с.

6.Ровба Е.А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации: афтореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ-мат наук. БГУ, Минск, 1998. – 38с.