
**XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс
научно-исследовательских работ учащихся средних,
средних специальных учебных заведений и студентов вузов
«От Альфа к Омеге...» (с международным участием)
Секция 1. Алгебра, геометрия и математический анализ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Государственное учреждение образования «Гимназия г. Фаниполя»

НОВЫЕ ГРАФЫ

Зудова Полина Григорьевна
11 класс

Василькевич Г. А., учитель
математики высшей
квалификационной категории,
ГУО «Гимназия г. Фаниполя»

г. Фаниполь, 2021

**XI Республиканская научно-практическая конференция-конкурс
научно-исследовательских работ учащихся средних,
средних специальных учебных заведений и студентов вузов
«От Альфа к Омеге...» (с международным участием)**

Секция 1. Алгебра, геометрия и математический анализ
РЕФЕРАТЫ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ ШКОЛЬНИКОВ

НОВЫЕ ГРАФЫ

П. Г. Зудова

ГУО «Гимназия г. Фаниполя», 11 «Б» класс,

Фаниполь, Беларусь

Научный руководитель – Г.А. Василькевич, учитель математики ГУО «Гимназия г. Фаниполя»

Работа 15 с., 1 ч., 6 рис., 0 табл., 2 источников, 0 прил.

Ключевые слова: граф, почти полный граф, граф типа, регулярный граф, вершины, степень

Данная работа является продолжением исследовательской работы «Почти полные графы». В работе «Новые графы» обобщены виды почти полных графов, состоящие из двух, трех, четырех множеств, исследование по которым проводилось в предыдущих работах. Доказана теорема о существовании почти полного графа типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$. Исследованы и доказаны различные конкретные случаи графа типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$. Так же доказаны теоремы о существовании почти полного графа типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$. Выведен новый алгоритм построения почти полных графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$. В данной работе обобщаются исследования по почти полным графам.

Объектом исследования является существование почти полных графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$.

- Цель работы – 1. Ввести определение графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
2. Определить условия существования графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
3. Вывести алгоритм построения графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
4. Определить условия существования графов типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$.

Работа посвящена исследованию условий существования почти полных графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$

- В результате исследования были получены следующие результаты 1. Введено определение почти полного графа типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
2. Определены условия существования почти полных графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$:
а) если $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$, ..., $a_p \geq p$, ($p \in \overline{1, k}$), a_{2s} – четные ($s \in \overline{1, k}$), то граф $G(a_1, a_2 \dots a_k)$ существует.
б) При отсутствии вершин в некоторых множествах, граф типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$ существует.
3. Выведен алгоритм построения графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
4. Определены условия существования графов типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$.

а) Если $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 3$, $a_3 \geq 3$, $a_4 \geq 5$, $a_5 \geq 5$, a_2, a_4 – нечетные, то почти полный граф типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ существует.

б) Граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ существует, если 2 из 3-х множеств a_2, a_4, a_6 будет иметь ноль вершин, а оставшееся множество будет иметь четное количество вершин.

в) Граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ существует, если одно из множеств a_2, a_4, a_6 не имеет вершин, и одно из оставшихся множеств будет иметь четное количество вершин.

5. В дальнейшей работе можно рассмотреть условия существования для конкретного числа множеств.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Основная часть	4
I часть	4
II часть.....	5
Заключение	12
Список использованных источников	13

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением серии авторских работ о почти полных графах, определение дано авторами работы. В предыдущих работах введено определение почти полных графов $G(p, k, l, q, 0 \dots)$, $VG=A \cup B \cup C \cup D$, $|A|=p$, вершины имеют степень $n-1$; $|B|=k$, вершины имеют степень $n-2$ $|C|=l$, вершины имеют степень $n-3$, $|D|=q$, вершины имеют степень $n-4$ для двух, трех, четырех множеств. Выведены и доказаны условия существования таких графов.

Граф $G(p, 0, l, q)$ будет существовать при: p, l, q – чет; p, q – чет, l – нечет; p – нечет, l, q – чет; p, l – нечет, q – чет;

Граф $G(p, k, 0, q)$ будет существовать при: k, q – чет; k, q – нечет;

Граф $G(0, k, l, q)$, который подобен графу $G(p, k, l, q)$, будут существовать при: k, l, q – чет; k, q – чет, l – нечет; k, q – нечет, l – чет.

- Цель:** 1. Ввести определение графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
2. Определить условия существования графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
3. Вывести алгоритм построения графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
4. Определить условия существования графов типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$.

Задача: исследовать условия существования графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

I. Определение и достаточное условие существования графа типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$

Определение: Граф G называется почти полным графом типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$, где $(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = n$, если в нем a_1 вершин степени $n - 1$, a_2 вершин степени $n - 2$, ..., a_p вершин степени $n - p$.

Теорема 1: Пусть $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_p \geq p, (p \in \overline{1, k}), a_{2s} - \text{четные } (s \in \overline{1, k})$. Тогда существует $G(a_1, a_2 \dots a_k)$ - граф.

Доказательство: Строим полные графы $K_{a_1}, K_{a_2}, \dots, K_{a_k}$. Строим регулярные графы $\tilde{G}_2$ степени 1, имеющий a_2 вершин, $\tilde{G}_3$ степени 2, имеющий a_3 вершин, ..., $\tilde{G}_p$ степени $p - 1$, имеющий a_p вершин ($p \in \overline{1, k}$).

Существование графов $\tilde{G}_p$ обеспечивает условие теоремы*.

Теорема*: Пусть натуральные числа n и d , среди которых есть четные, удовлетворяют неравенствам $0 \leq d \leq n - 1$. Тогда существует регулярный граф порядка n и степени d . (Лекции по теории графов М.УРСС .2009. с.32).

Удаляем из графов K_{a_p} ребра $\tilde{G}_p$, получаем граф $G_p, (p \in \overline{2, k})$. Соединяем ребрами графы G_{p_i} (здесь $G_i = K_{a_i}$). Получаем граф $G(a_1, a_2, \dots a_k)$.

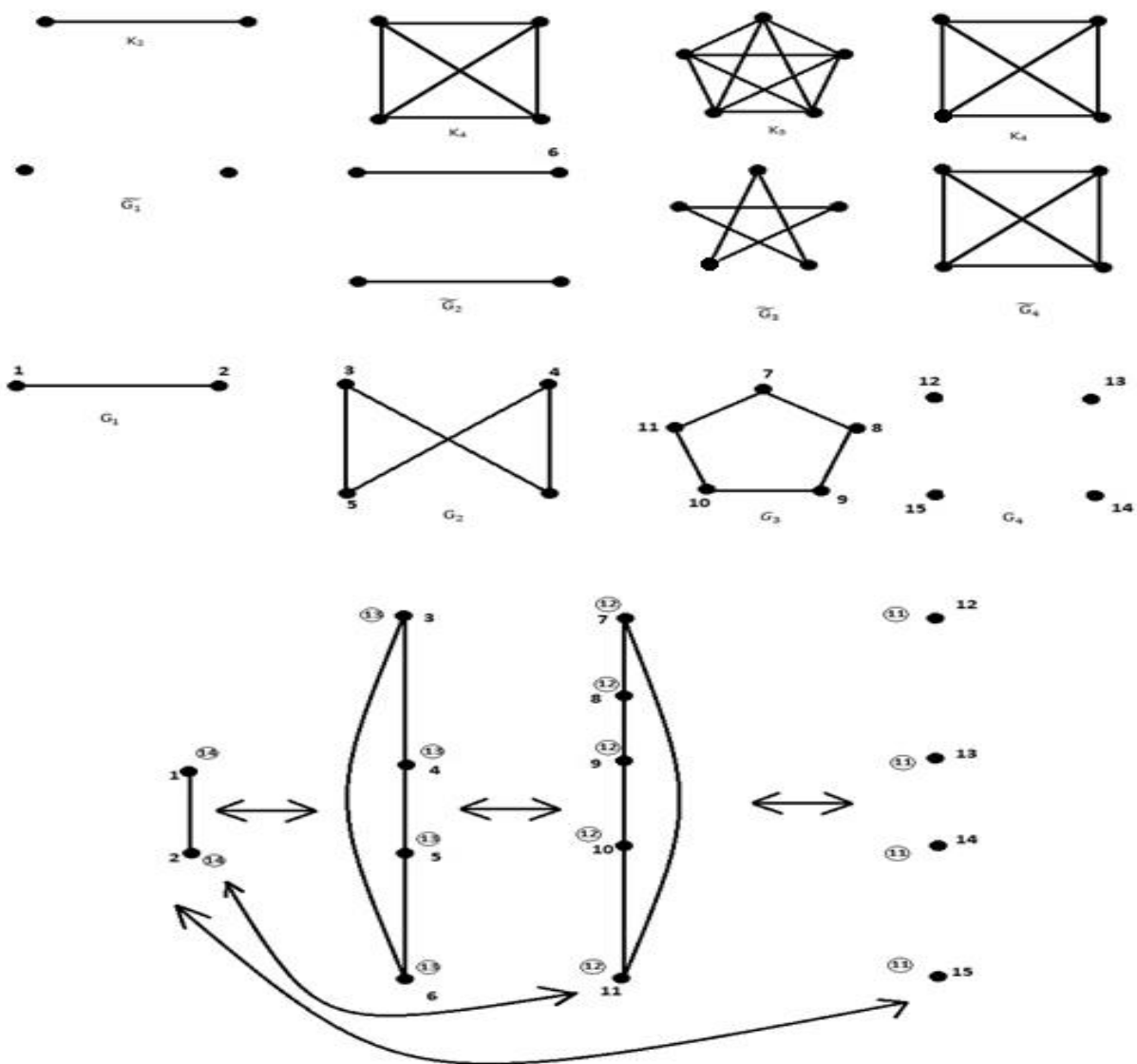
Действительно, степень каждой вершины графа G_p равна $(a_p - 1) - (p - 1)$. Поскольку такая вершина смежна с каждой вершиной остальных графов $G_i (i \neq p)$, то ее степень оказывается равной

$$a_1 + a_2 + \dots a_{p-1} + ((a_p - 1) - (p - 1)) + a_{p+1} + \dots + a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k - p = n - p$$

Теорема доказана.

Пример 1. Построить граф $G(2,4,5,4)$

1) Строим полные графы $K_{a_1} = K_2, K_{a_2} = K_4, K_{a_3} = K_5, K_{a_4} = K_4$. 2) Строим регулярные графы $\tilde{G}_1$ степени 0, имеющий 2 вершины; $\tilde{G}_2$ степени 1, имеющий 4 вершины; $\tilde{G}_3$ степени 2, имеющий 5 вершин; $\tilde{G}_4$ степени 3, имеющий 4 вершины. 3) Удаляем из графов $K_{a_1} = K_2, K_{a_2} = K_4, K_{a_3} = K_5, K_{a_4} = K_4$ ребра регулярных графов $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \tilde{G}_4$. 4) Получаем графы G_1, G_2, G_3, G_4 . 5) Соединяем ребрами графы G_1, G_2, G_3, G_4 . Получаем искомый граф.



Знак $G_i \longleftrightarrow G_j$ обозначает, что каждая вершина графа G_i соединена с каждой

вершиной графа G_j . Знак $\textcircled{s}$ означает, что соответствующая вершина имеет степень s в графе $G(2,4,5,4)$.

Следствие 1: Пусть $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_m = 0, \dots, a_p \geq p, (p \in \overline{1, k}), a_{2s} - \text{четные} (s \in \overline{1, k}), m \in \overline{1, p}$. Тогда существует $G(0,0,0, \dots, a_m, \dots, a_k)$ -граф, то есть существуют графы вида $G(0, a_2 \dots a_k), G(0,0, a_3 \dots a_k), G(0,0, \dots, 0, a_p \dots a_k)$.

Доказательство: отсутствие вершин степени $n-1, n-2, \dots, n-p$ не влияет на построение графа типа $G(a_1, a_3, a_4 \dots a_k)$. Потому что построение полных графов $K_{a_1}, K_{a_2}, \dots, K_{a_k}$ и регулярных графов $\tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \dots, \tilde{G}_p$ будет начинаться с того множества, которое имеет количество вершин больше 0.

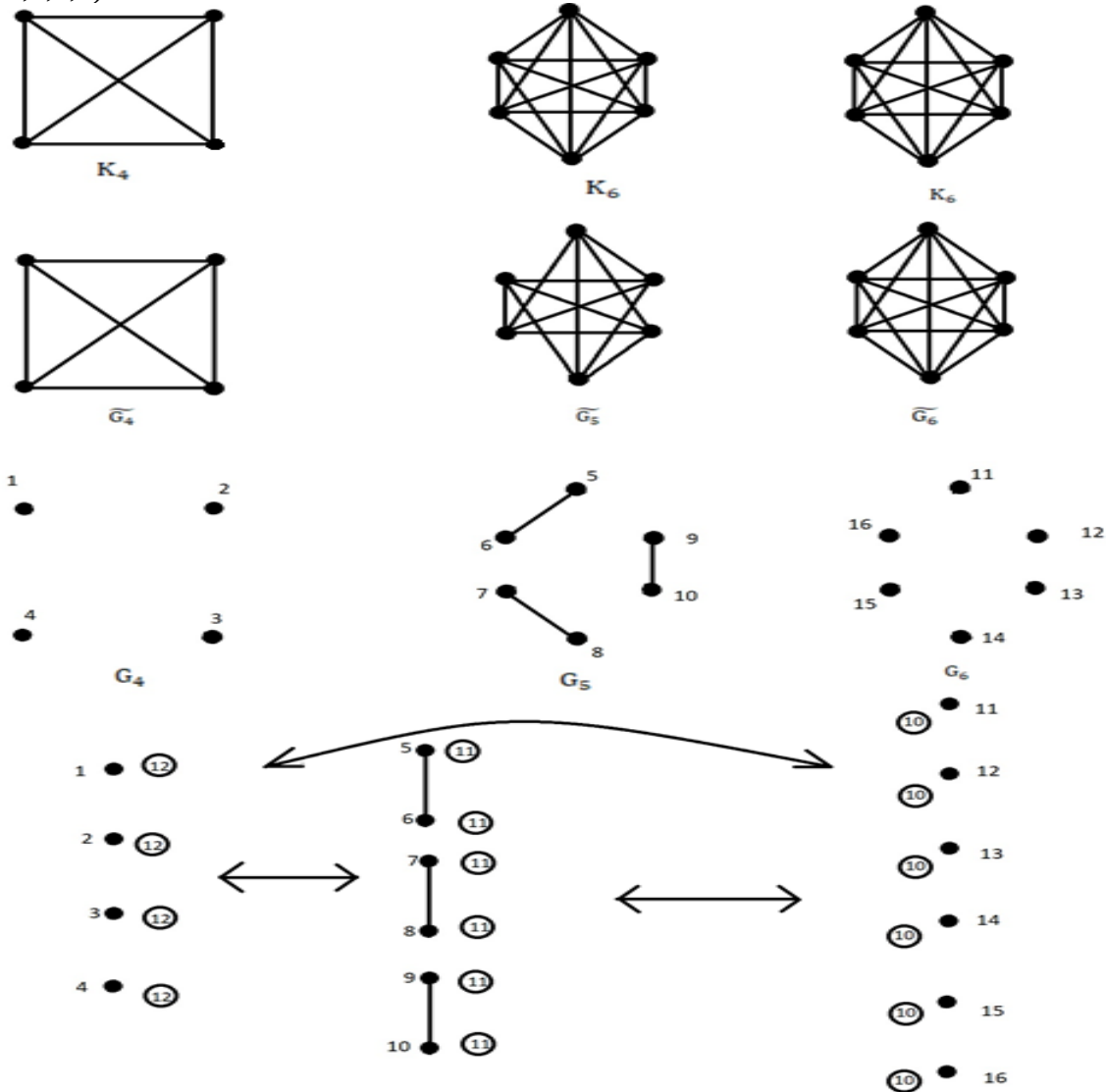
Пример 2. Построить $G(0,0, 0,4,6,6)$

1) Строим полные графы $K_{a_1} = 0, K_{a_2} = 0, K_{a_3} = 0, K_{a_4} = K_4, K_{a_5} = K_6, K_{a_6} = K_6$.

2) Строим регулярные графы $\tilde{G}_4$ степени 3, имеющий 4 вершины; $\tilde{G}_5$ степени 4, имеющий 6 вершин; $\tilde{G}_6$ степени 5, имеющий 6 вершин.

3) Удаляем из графов $K_{a_4} = K_4, K_{a_5} = K_6, K_{a_6} = K_6$ ребра регулярных графов $\tilde{G}_4, \tilde{G}_5, \tilde{G}_6$.

4) Получаем графы G_4, G_5, G_6 . 5) Соединяем ребрами графы G_4, G_5, G_6 . Получаем. искомый граф $G(0,0, 0,4,6,6)$.



Теорема 2. Пусть $a_1 \geq 1, a_2 = 0, \dots, a_p \geq p, (p \in \overline{1, k}), a_{2s} - \text{четные } (s \in \overline{1, k})$. Тогда существует граф вида $G(a_1, 0, a_3, a_4 \dots a_k)$.

Доказательство: Рассмотрим граф $G(a_1, 0, a_3, a_4 \dots a_k)$.

Строим полные графы $K_{a_1}, K_{a_3}, K_{a_4} \dots K_{a_k}$. Строим регулярные графы $\tilde{G}_3$ степени 2, имеющий a_3 вершин. $\tilde{G}_4$ степени 3, имеющий a_4 вершин. $\tilde{G}_p$ степени $p-1$, имеющий a_p вершин ($p \in \overline{1, k}$) (По теореме * такие графы существуют).

Удаляем из полных графов K_{a_p} ребра графов $\tilde{G}_p$, получаем граф $G_p (p \in \overline{3, k})$.

Соединяем ребрами графы G_{p_i} (здесь $G_i = K_{a_i}$). Получаем граф типа $(a_1, 0, a_3, a_4 \dots a_k)$. В нем степень каждой вершины графа равна $(a_p - 1) - (p - 1)$, так как такая вершина смежна с

каждой вершиной графов, то есть её степень равна $a_1 + 0 + \dots + a_{p-1} + ((a_p - 1) - (p - 1)) + a_{p+1} + \dots + a_k = a_1 + 0 + \dots + a_k - p = n - p$. Доказано.

Гипотеза: Нули могут стоять на любой позиции, и это не влияет на построение графа типа $G(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$.

Из леммы о рукопожатиях вытекает, что не существует графа, порядок и степень которого нечетны [с.32 из учебного пособия «Теория регулярных графов» М.УРСС.2009].

Следствие 2: Пусть $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_p \geq p, (p \in \overline{1, k}), a_{2s} - \text{четные } (s \in \overline{1, k})$ и некоторые из этих множеств могут отсутствовать. Тогда существуют $G(a_1, a_2, 0, 0, \dots, 0, \dots, a_n), G(a_1, a_2, a_3, 0, \dots, 0, a_k, \dots, a_n), G(a_1, a_2, a_3, 0, \dots, 0)$ и т.д. – графы.

Доказательство: Поскольку при построении полных графов, а потом регулярных в сумме степень каждой вершины будет $n - p$. Значит, отсутствие вершин некоторых множеств, независимо от позиции таких множеств в графе, не влияет на существование таких графов.

Допустим, что $a_2 = 0$, тогда:

$$a_1 + 0 + \dots + a_{p-1} + ((a_p - 1) - (p - 1)) + a_{p+1} + \dots + a_k = a_1 + 0 + \dots + a_k - p = n - p \quad (1)$$

Подставив 0 вместо любого слагаемого формулы (1), в конечном итоге мы получим $n - p$, потому что 0 не вносит никакого значения. Аналогично с другими случаями. Так как 0 – чётное число, то может стоять на любом месте в графе.

II. Достаточное условие существования почти полный граф типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Теорема 3. Пусть $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3 \geq 3, a_4 \geq 5, a_5 \geq 5, a_2, a_4 - \text{нечетные}$. Тогда существует почти полный граф типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Доказательство:

1) Строим полные графы $\tilde{G}_1 = K_{a_1}, \tilde{G}_2 = K_{a_2}, \tilde{G}_3 = K_{a_3}, \tilde{G}_4 = K_{a_4}, \tilde{G}_5 = K_{a_5}$.

2) В графах $\tilde{G}_i$ строим максимальные регулярные подграфы T_i , в $\tilde{G}_2 - \text{подграф } T_2 \text{ степени } 1$, в $\tilde{G}_3 - \text{подграф } T_3 \text{ степени } 2$, в $\tilde{G}_4 - \text{подграф } T_4 \text{ степени } 3$, в $\tilde{G}_5 - \text{подграф } T_5 \text{ степени } 4$.

[Если в $\tilde{G}_2$ четное число вершин, то это будет совершенное паросочетание, если нет, то совершенное паросочетание в графе $K_2 - a$, где $a - \text{произвольная вершина графа } K_2$.

Если в $\tilde{G}_4 - \text{четное число вершин}$, то $\tilde{G}_4$ будет регулярным графом степени 3, содержащий все a_4 вершины графа K_{a_4} , если нет, то регулярный граф степени 3 содержит все вершины графа $K_{a_4} - b$, где $b - \text{произвольная вершина графа } K_{a_4}$].

Существование таких графов возможно по теореме (*)

3) Удаляем ребра графов T_i из K_{a_i} , получаем графы G'_i .

4) Соединим каждую вершину графа G'_i с каждой вершиной графа G'_j ($i \neq j$), получаем почти полный граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Если все числа $a_i - \text{четные}$, то доказываемая теорема вытекает из теоремы 1. Пусть a_2 и $a_4 - \text{нечетные числа}$. Как и при доказательстве теоремы 1, доказывается, что степени всех вершин, кроме a и b в графе G' равны заданным.

Степень вершины a_2 будет равна $a_2 + 1$, степень вершины b будет равна $a_4 + 3$.

В этом случае удаляем из графа G' ребро (ab) и ребра (bc_1) и (bc_2) , где вершины c_1 и $c_2 - \text{любые несмежные вершины графа } G'_5$. Эти вершины соединяем ребром. Полученный граф является искомым графом G .

В случае, если только одно из чисел a_2 или a_4 нечетно, то граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ не существует по лемме о рукопожатиях.

Пусть, например, a_2 – нечетное, a_4 – четное, a_1 , a_3 и a_5 – произвольные.

1а) a_1 – четное, a_2 – нечетное, a_3 – четное, a_4 – четное, a_5 – четное.

$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = p$ – число нечетное. Тогда $p - 2$ – число нечетное. Значит, в графе a_2 нечетное число вершин нечетной степени, следовательно, граф не существует по лемме о рукопожатиях.

1б) a_1 – четное, a_2 – нечетное, a_3 – нечетное, a_4 – четное, a_5 – четное.

$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = p$ число четное. Тогда $p - 3$ – число нечетное. Значит, в графе нечетное число вершин нечетной степени, следовательно, граф не существует по лемме о рукопожатиях.

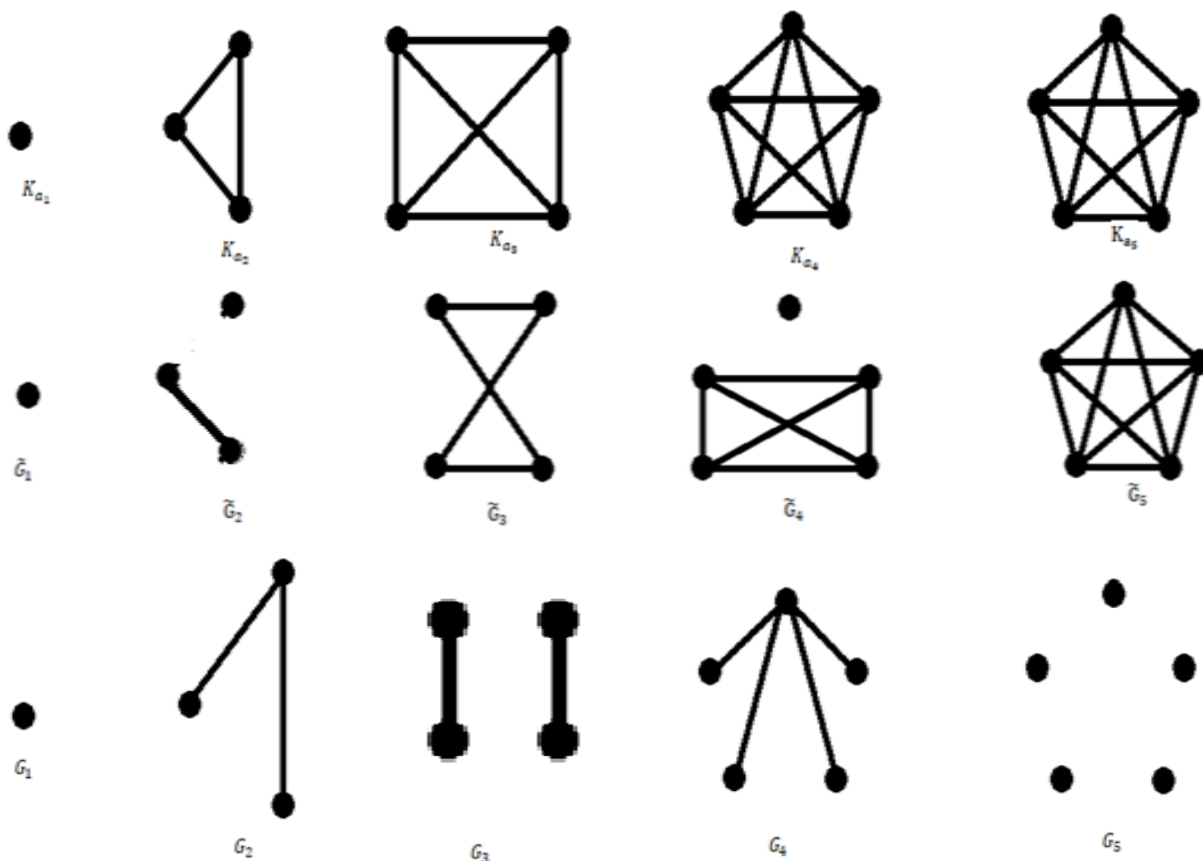
1в) a_1 – четное, a_2 – нечетное, a_3 – нечетное, a_4 – четное, a_5 – нечетное.

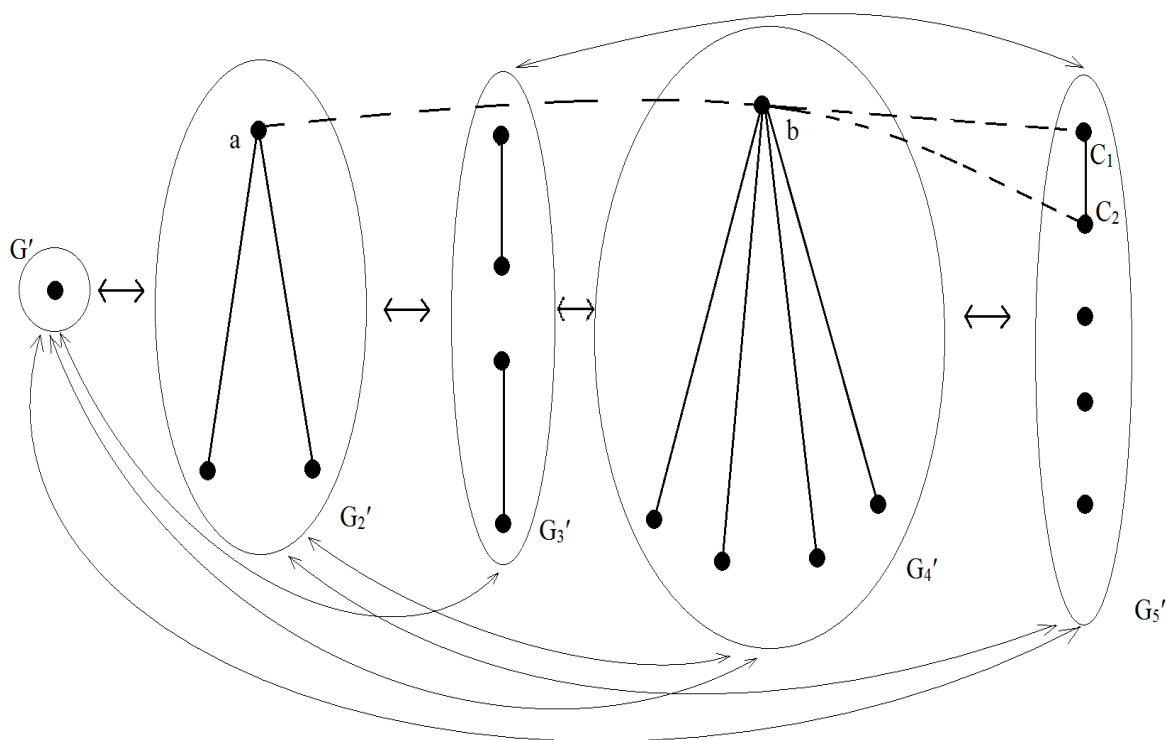
$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = p$ число нечетное. Тогда $p - 2$ – число нечетное. Значит, в графе a_2 нечетное число вершин нечетной степени, следовательно, граф не существует по лемме о рукопожатиях.

1г) a_1 – нечетное, a_2 – нечетное, a_3 – нечетное, a_4 – четное, a_5 – нечетное.

$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = p$ число четное. Тогда $p - 1$, $p - 3$ и $p - 5$ – числа нечетные. Значит, в графе $(a_1 + a_3 + a_5)$ нечетное число вершин нечетной степени. Граф не существует. Исследуя остальные случаи, мы получаем, что почти полный граф типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ не существует.

Пример 3. Построить $G(1, 3, 4, 5, 6)$





Знак $\longleftrightarrow$ обозначает ребра между всеми вершинами.

Знаки $---$ обозначают удаленные соответствующие рёбра

Знак --- обозначает добавленное ребро.

1) Строим полные графы $\tilde{G}_1 = K_{a_1} = 1$, $\tilde{G}_2 = K_{a_2} = 3$, $\tilde{G}_3 = K_{a_3} = 4$, $\tilde{G}_4 = K_{a_4} = 5$, $\tilde{G}_5 = K_{a_5} = 6$.

2) В графах $\tilde{G}_{1-6}$ строим максимальные регулярные подграфы T , в $\tilde{G}_2$ – подграф T_2 степени 1, в $\tilde{G}_3$ – подграф T_3 степени 2, в $\tilde{G}_4$ – подграф T_4 степени 3, в $\tilde{G}_5$ – подграф T_5 степени 4.

3) Удаляем ребра графов T_2, T_3, T_4, T_5 из K_2, K_3, K_4, K_5 , получаем графы $G'_1, G'_3, G'_4, G'_5, G'_6$.

4) Соединим все вершины графов $G'_1, G'_3, G'_4, G'_5, G'_6$ между собой,

Степень вершины a в подграфе G'_2 будет равна $a_2 + 1$, степень вершины b в подграфе G'_4 будет равна $a_4 + 3$.

В этом случае удаляем из графа G' ребро (ab) и ребра (bc_1) и (bc_2) , где вершины c_1 и c_2 – любые несмежные вершины графа G'_5 . Эти вершины соединяем ребром. Полученный граф является искомым графом $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Рассмотрим случаи, в которых одно из множеств имеет ноль вершин:

Теорема 4. Пусть $a_1=0, a_2 \geq 3, a_3 \geq 3, a_4 \geq 5, a_5 \geq 5$. a_2, a_4 – нечетные. Тогда существует граф $G(0, a_2, a_3, a_4, a_5)$

Доказательство: существования данного графа аналогично доказательству теоремы 3.

Граф данного вида не существует, если только одно из множеств a_2, a_4 имеет нечетное количество вершин (доказано ранее).

2. Пусть $a_1 \geq 1, a_2 = 0, a_3 \geq 3, a_4 \geq 5, a_5 \geq 5$. a_4 – нечетное.

Граф $G(a_1, 0, a_3, a_4, a_5)$ не существует, т.к. только одно из множеств a_2 и a_4 имеет нечетное количество вершин, т.е. множество a_4 .

3. Пусть a_1, a_3, a_5 – чет, $a_2=0$, a_4 – нечет.

Имеем: $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=n$ – число нечетное, тогда $n-4$ – нечетное, значит, граф $G(a_1, 0, a_3, a_4, a_5)$ не существует по лемме о рукопожатиях.

4. Пусть a_1 – нечет., $a_2=0$, a_4 – нечет., a_3, a_5 – четное, $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=n$ – число четное; $n-1$ – нечетное, значит, граф $G(a_1, 0, a_3, a_4, a_5)$ не существует по лемме о рукопожатиях.

5. Пусть $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3=0, a_4 \geq 5, a_5 \geq 5$. a_2, a_4 – нечетные. Тогда существует граф $G(a_1, a_2, 0, a_4, a_5)$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

6. Пусть $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3 \geq 3, a_4=0, a_5 \geq 5$. a_2 – нечетное. Тогда граф $G(a_1, a_2, a_3, 0, a_5)$ не существует. Доказательство аналогично пункту 2.

7. Пусть $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3 \geq 3, a_4 \geq 5, a_5=0$. a_2, a_4 – нечетное. Тогда существует граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, 0)$ (по теореме 2).

8. Пусть $a_1 \geq 1, a_2=0, a_3 \geq 3, a_4=0, a_5 \geq 5$. Тогда существует граф $G(a_1, 0, a_3, 0, a_5)$ (по теореме 3).

9. Пусть $a_1=0, a_2=0, a_3 \geq 3, a_4 \geq 5, a_5 \geq 5, a_4$ – нечет. Тогда граф $G(0, 0, a_3, a_4, a_5)$ не существует (по теореме 3).

Вывод: Если только одно из множеств a_2 и a_4 имеет 0 вершин, а оставшиеся – нечетное количество вершин, то граф не существует.

III. Достаточное условие существования графа вида $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$.

Рассмотрим почти полный граф, состоящий из 6 множеств, т.е. граф вида $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

1) Пусть a_1 – четное, $a_2=0$, a_3 – четное $a_4=0$, a_5 – четное, a_6 – нечетное
 $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – число нечетное, тогда $n-6$ – нечетное. Значит, в множестве a_6 нечетное число вершин нечетной степени. Граф не существует по лемме о рукопожатиях.

2) Пусть a_1 – четное, $a_2=0$, a_3 – четное $a_4=0$, a_5 – четное, a_6 – четное
 $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – четное, тогда $n-6$ – четное, $n-1, n-3, n-5$ – нечетное, а количество вершин – четное. Граф существует.

Построение по алгоритму теоремы 1 и 3.

3) Пусть a_1 – четное, $a_2=0$, a_3 – четное $a_4=0$, a_5 – нечетное, a_6 – нечетное
 $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – четное, тогда $n-5$ – нечетное. Граф не существует по лемме о рукопожатиях.

4) Пусть a_1 – четное, $a_2=0$, a_3 – нечетное $a_4=0$, a_5 – нечетное, a_6 – нечетное.
 $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – нечетное, тогда $n-6$ – нечетное. Граф не существует.

5) Пусть a_1 – нечетное, $a_2=0$, a_3 – нечетное $a_4=0$, a_5 – нечетное, a_6 – нечетное.

$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – четное, тогда $n-1, n-3, n-5$ – нечетное.

Граф не существует.

Вывод: Граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ не будет существовать, если 2 из 3-х множеств a_2, a_4, a_6 будет иметь ноль вершин, а оставшееся множество будет иметь нечетное количество вершин.

1) Пусть a_1 – четное, $a_2=0$, a_3 – четное, a_4 – нечетное, a_5 – четное, a_6 – четное.

$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – нечетное, тогда $n-4$ – нечетное.

Граф не существует

2) Пусть a_1 – нечетное, $a_2=0$, a_3 – нечетное a_4 – нечетное, a_5 – нечетное, a_6 – четное.

$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – четное, тогда $n-1$, $n-3$, $n-5$ – нечетное.

Граф не существует.

3) Пусть a_1 – четное, $a_2=0$, a_3 – четное a_4 – нечетное, a_5 – нечетное, a_6 – четное.

$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – четное, тогда $n-5$ – нечетное.

Граф не существует.

4) Пусть a_1 – нечетное, $a_2=0$, a_3 – нечетное a_4 – нечетное, a_5 – четное, a_6 – четное.

$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=n$ – нечетное, тогда $n-4$ – нечетное.

Граф не существует.

Вывод: : Граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ не будет существовать, если одно из множеств a_2, a_4, a_6 не имеет вершин, и одно из оставшихся множеств будет иметь нечетное количество вершин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Введено определение почти полного графа типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
2. Определены условия существования почти полных графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$:
 - а) если $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_p \geq p, (p \in \overline{1, k}), a_{2s} - \text{четные } (s \in \overline{1, k})$, то граф $G(a_1, a_2 \dots a_k)$ существует.
 - б) При отсутствии вершин в некоторых множествах, граф типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$ существует.
3. Выведен алгоритм построения графов типа $G(a_1, a_2 \dots a_k)$;
4. Определены условия существования графов типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$.
 - а) Если $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3 \geq 3, a_4 \geq 5, a_5 \geq 5, a_2, a_4 - \text{нечетные}$, то почти полный граф типа $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ существует.
 - б) Граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ существует, если 2 из 3-х множеств a_2, a_4, a_6 будет иметь ноль вершин, а оставшееся множество будет иметь четное количество вершин.
 - в) Граф $G(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ существует, если одно из множеств a_2, a_4, a_6 не имеет вершин, и одно из оставшихся множеств будет иметь четное количество вершин.
5. В дальнейшей работе можно рассмотреть условия существования для конкретного числа множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников, О. И. Теория графов в занимательных задачах/ О. И. Мельников. – Изд. 5-е. – М. : URSS, 2013.
2. Мельников, О. И. Лекции по теории графов / О.И. Мельников. – Изд. 2-е. – М. : URSS, 2009. – 32 с.